

$\pi\pi$ -Korrelationen in heißer und dichter Materie

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat)

genehmigte **Dissertation** von
Dipl.-Phys. **Carsten Isselhorst**
aus Duisburg-Homberg

Darmstadt 2006
D17

Referent: Professor Dr. Jochen Wambach
Korreferent: Professor Dr. Peter Braun-Munzinger

Tag der Einreichung: 05.07.2006
Tag der Prüfung: 24.07.2006

$\pi\pi$ -correlations in hot and dense matter

Abstract

Properties of the $\pi\pi$ -interactions in hot and dense matter are studied within a nonperturbative and symmetry conserving approach. The pion and its chiral partner, the σ -meson, are described within the linear σ model and special attention is given to the conservation of the underlying chiral symmetry.

The first part deals with the properties of pion and σ in the vacuum, the further being the „Goldstone“-boson of the theory, while the latter is a broad resonance. The results in the vacuum are tested against experimental results like $\pi\pi$ -phase shifts as well as the mass and the width of the σ -meson. Besides the propagator of the σ -meson, the preservation of the chiral symmetry is explicitly examined and chiral Ward identities for the n -point functions of the theory are fulfilled. Furthermore the $\pi\pi$ -scattering matrix is calculated and shown to be consistent with predictions from chiral perturbation theory. In the second part of this work the model is extended to finite temperature with special emphasis on the chiral phase transition. The transition temperature and the critical exponent β are determined, and the influence of the temperature on the propagator of the σ -meson as well as on the $\pi\pi$ -scattering matrix is examined.

The third part deals with the properties of pion and σ in dense matter. Additional couplings like the ones to particle-hole excitations and short range repulsion have to be included to ensure stability at nuclear matter density. At zero three momentum one observes a strong downward shift of the σ -mass accompanied by an accumulation of strength near the two-pion threshold in the spectral function. Taking into account a finite three momentum for the $\pi\pi$ -pair, respectively the σ -meson, one observes a weakening of the aforementioned effect.

Having thus developed a model for the $\pi\pi$ -interaction at finite temperature and density, we try to describe and explain two experiments with our model in the last part of the work. Both experiments have measured cross sections for pion pairs in dense matter and observe an accumulation of strength near the two-pion threshold with increasing density of the reaction. This effect could be explained by the modification of the σ -meson in dense matter, as shown in our calculations. A closer look at the kinematics of the experiment though shows, that most of the events take place at a finite three momentum of the pion pair, where the modification of the pair is already weakened in our calculation. Therefore the result of the experiment can only be partly attributed to the softening of the σ -meson in dense matter apparent in our calculations.

$\pi\pi$ -Korrelationen in heißer und dichter Materie

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Eigenschaften der $\pi\pi$ -Wechselwirkung in heißer und dichter Materie mittels einer nichtperturbativen und symmetrieerhaltenden Methode untersucht. Das Pion und dessen chiraler Partner, das σ -Meson, werden mit dem linearen σ -Modell beschrieben, wobei besondere Aufmerksamkeit der Erhaltung der zugrundeliegenden chiralen Symmetrie gewidmet wird.

Im ersten Teil werden das Pion und σ -Meson im Vakuum behandelt. Beim Ersteren handelt es sich um das sogenannte „Goldstone“-Boson der Theorie, und das Letztere stellt eine breite Resonanz dar. Die erhaltenen Ergebnisse werden mit experimentellen Daten, wie den $\pi\pi$ -Phasenverschiebungen, sowie der Masse und Breite des σ -Mesons verglichen. Neben der Bestimmung des σ -Meson-Propagators wird zudem die Erhaltung der chiralen Symmetrie gezeigt, und die chiralen Wardidentitäten für die n-Punkt Funktionen der Theorie sind erfüllt. Darüber hinaus wird die $\pi\pi$ -Streumatrix berechnet und gezeigt, daß diese im Einklang mit Vorhersagen aus der chiralen Störungstheorie ist.

Im zweiten Teil der Arbeit wird das Modell auf endliche Temperatur erweitert und der chirale Phasenübergang wird untersucht. Die Temperatur des Phasenübergangs und der kritische Exponent β werden bestimmt. Desweiteren wird der Einfluss der Temperatur auf den Propagator des σ -Mesons und auf die $\pi\pi$ -Streumatrix studiert.

Der dritte Abschnitt behandelt die Eigenschaften von Pion und σ -Meson in dichter Materie. Zusätzliche Kopplungen, wie die Teilchen-Loch Anregungen und kurzreichweitige Repulsion sind notwendig, um die Stabilität bei Kernmateriedichte zu gewährleisten. Bei verschwindendem Dreierimpuls beobachtet man eine starke Abnahme der σ -Masse zusammen mit einem deutlichen Anstieg der Spektralfunktion in der Nähe der Zwei-Pionschwelle. Unter Berücksichtigung eines endlichen Dreierimpulses für das $\pi\pi$ -Paar, beziehungsweise für das σ -Meson, ist jedoch eine deutliche Abschwächung dieses Effektes zu erkennen.

Nachdem also ein Modell für die $\pi\pi$ -Wechselwirkung bei endlicher Temperatur und Dichte entwickelt wurde, wird im letzten Abschnitt dieser Arbeit versucht, zwei Experimente zu beschreiben und deren Resultate zu erklären. In beiden Experimenten wird der Wirkungsquerschnitt von einem Pionen Paar in dichter Materie gemessen und eine Ansammlung von Stärke in der Nähe der Zwei-Pionschwelle mit steigender Dichte der Reaktion beobachtet. Dieser Effekt könnte auf die Modifikation des σ -Mesons zurückzuführen sein, wie sie in den Rechnungen auftritt. Eine nähere Untersuchung der Kinematik der Experimente zeigt jedoch, daß ein Großteil der Ereignisse bei endlichem Dreierimpuls des Pionpaares stattfindet, bei dem die Modifikation des Paares bereits deutlich abgeschwächt ist. Daher kann der im Experiment beobachtete Anstieg nur teilweise mit den in unseren Rechnungen auftretenden Modifikationen des σ -Mesons bei endlicher Dichte erklärt werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Das lineare σ-Modell	8
2.1	Lagrangedichte des Modells	8
2.2	Hartree-Fock-Bogoliubov-Näherung	11
2.3	„Random-Phase-Approximation“	14
2.4	Die $1/N$ -Entwicklung	16
2.5	$\pi\pi$ -Streuung und chirale Symmetrie	18
3	Das σ-Meson im Vakuum	21
3.1	Fixierung der Parameter	21
3.2	Streuphasen	23
3.3	Der σ -Propagator	25
4	Effekte bei endlicher Temperatur	29
4.1	Thermodynamische Grundlagen	29
4.2	HFB-Formalismus bei endlicher Temperatur	30
4.2.1	Der Matsubara-Formalismus	31
4.3	RPA bei endlicher Temperatur	32
4.4	Massenverlauf bei endlicher Temperatur	34
4.4.1	Der kritische Exponent β	38
4.5	σ -Propagator bei endlicher Temperatur	39
4.5.1	Einfluß des Dreierimpulses	44
5	Das σ-Meson in dichter Materie	48
5.1	Das Pion in kalter Kernmaterie	49
5.2	σ -Meson bei endlicher Dichte	51
5.3	Die skalare Suszeptibilität	56
5.4	σ -Propagator und $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix	63
5.4.1	Ergebnisse für $\vec{p} = 0$	63
5.4.2	Ergebnisse für endliche Impulse $\vec{p} \neq 0$	66

6	Die $\pi\pi$-Wechselwirkung im Experiment	69
6.1	Die $A(\pi,\pi\pi)$ Reaktion	70
6.1.1	Reaktionstheorie	73
6.1.2	Endzustandswechselwirkungen	77
6.1.3	Differentielle Wirkungsquerschnitte	79
6.2	Die $A(\gamma,\pi\pi)$ Reaktion	84
6.2.1	Die elementare Übergangsamplitude $T_{\gamma N \rightarrow \pi\pi N}$	86
6.2.2	Differentieller Wirkungsquerschnitt $\gamma A \rightarrow \pi\pi A$	89
7	Zusammenfassung	95
A	Hartree-Bogoliubov-Formalismus	99
B	Regularisierung der Tadpolediagramme	101
C	Die Streumatrix $T_{\pi\pi}$	103
D	Pion-Selbstenergie in dichter Materie	105
E	Die Reaktion $\gamma N \rightarrow \pi\pi N$	108

Kapitel 1

Einführung

In der Physik unterscheidet man vier fundamentale Wechselwirkungen: Gravitation, Elektromagnetismus, schwache Kraft und starke Kraft. Mit Ausnahme der Gravitation können diese in Form einer Quantenfeldtheorie zusammengefaßt werden - dem Standardmodell. Das Standardmodell liefert im elektroschwachen Sektor sehr präzise Vorhersagen, da die Kopplungskonstanten von Elektromagnetismus und schwacher Kraft klein sind und sich diese erfolgreich durch Störungstheorie beschreiben lassen. Im Fall der Quantenchromodynamik (QCD), der Quantenfeldtheorie der starken Wechselwirkung, kann diese Methode allerdings aufgrund der Größe ihrer Kopplungskonstanten α_s im Vakuum nicht angewendet werden. Für eine erfolgreiche Beschreibung von starken Prozessen muß daher auf andere Methoden zurückgegriffen werden.

Darüber hinaus besitzt die QCD zwei weitere bemerkenswerte Eigenschaften, die entscheidend die starke Wechselwirkung und das hadronische Spektrum im Vakuum prägen:

Zum einen das sogenannte „Confinement“: Die fundamentalen Freiheitsgrade der starken Wechselwirkung, die Quarks und Gluonen, treten im Vakuum nicht als freie Teilchen auf. Sie sind in der Form von Baryonen oder Mesonen gebunden. Bei hohen Energien allerdings nimmt die Stärke der Kopplungskonstanten ab und die Quarks und Gluonen sind bei sehr hohen Energien „quasi“ freie Teilchen, was man als „asymptotische Freiheit“ bezeichnet. Bei diesen Energien ist auch die Beschreibung mittels Störungstheorie möglich und führt zu verlässlichen Vorhersagen.

Die zweite Eigenschaft der QCD ist die chirale Symmetrie und ihre spontane Brechung im Vakuum: Für masselose Quarks ist die QCD invariant unter $SU(N)_L \times SU(N)_R$ Transformationen von rechts- und linkshändigen Quarks. Die Annahme von masselosen Quarks ist dabei gut erfüllt, solange man sich auf die beiden leichten up- und down- Quarks beschränkt, deren Massen nur wenige MeV betragen, während typische Hadronenmassen in der Größenordnung von 1 GeV liegen. Diese Diskrepanz zwischen den Massen von Hadronen und den Massen der Quarks, aus denen die Hadronen aufgebaut sind, ist eine Folge der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie im Vakuum, infolgedessen neben einem nichtverschwindenden Wert des Quarkkondensates $\langle \bar{q}q \rangle$ auch masselose Goldstone Bosonen auftreten - die Pionen. Ihre physikalische Masse von 140 MeV erhalten diese dann

durch die explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch die von null verschiedenen Quarkmassen.

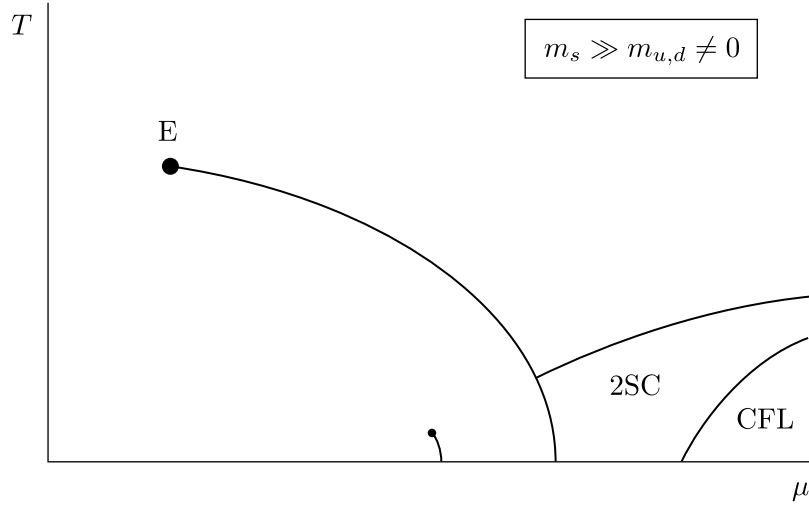


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des QCD Phasendiagramms als Funktion von Temperatur T und chemischen Potentials μ . Bei endlicher Temperatur und verschwindendem chemischen Potential sieht man anstatt eines Phasenübergangs ein „Crossover“. Bei einer bestimmten endlicher Dichte und Temperatur findet sich dann ein kritischer Endpunkt E , ab dem der Phasenübergang ins QGP erster Ordnung ist. Für hohe Werte des chemischen Potentials sieht man das Auftreten neuer Phasen, auf die wir aber im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingehen werden.

Die chirale Störungstheorie (χpT) nutzt diese Symmetrie der QCD aus, um im Bereich niedriger Temperaturen und Energien eine sehr verlässliche Beschreibung der Pion-Nukleon Wechselwirkung zu liefern, und Abschätzungen über den Temperaturverlauf des Quarkkondensates zu machen [1]. Ein weiterer vielversprechender Ansatz zum Verständnis der starken Wechselwirkung ist die Methode der Gittereichtheorie, in der die starke Wechselwirkung in einem diskreten Raum-Zeit-Gitter numerisch gelöst wird. Aufgrund von numerischen Schwierigkeiten lassen sich diese Berechnungen allerdings nur mit unphysikalisch hohen Quarkmassen ausführen, jedoch erlaubt diese „Gitter-QCD“ mit dem Auftreten von immer leistungsfähigeren Computern eine immer präziser werdende Bestimmung von statischen Hadroneneigenschaften, wie deren Massen. Eine weitere Vorhersage dieser Gitterrechnungen ist das Auftreten eines Phasenübergangs (bzw. eines Crossovers) von der hadronischen Phase in das Quark-Gluon-Plasma (QGP) bei einer Temperatur von etwa 170 MeV [2]. Das QGP ist dabei eine Phase, in der sowohl die chirale Symmetrie

wiederhergestellt ist, als auch die Quarks und Gluonen als freie Teilchen vorkommen und nicht mehr in Form von Hadronen gebunden sind. Ebenso wird für endliche Dichten ein Phasenübergang von der hadronischen Phase in das QGP erwartet. Verlässliche Rechnungen im Rahmen der Gittereichtheorie sind in diesem Bereich derzeit jedoch noch nicht möglich. Eine schematischen Überblick des Phasendiagramms sieht man in Abb. 1.1. Als Funktion des chemischen Potentials, welches ein Maß für die Dichte ist, und der Temperatur sieht man die Linie des Phasenübergangs eingezeichnet. Dabei geht man davon aus, daß für endliche Dichte und Temperatur ein Phasenübergang erster Ordnung stattfindet (durchgezogene Linie) und es bei einer bestimmten kritischen Temperatur und Dichte zum Auftreten eines kritischen Endpunktes kommt [3].

Neben der Bestimmung der Position dieses kritischen Punktes wirft sich dabei die Frage auf, inwieweit die Eigenschaften der Hadronen sich ändern, sobald man sich dem Phasenübergang nähert. Experimentell sind im Rahmen von Schwerionenstößen bereits einige Anstrengungen unternommen worden, um Modifikationen der Hadronen in Materie und das QGP zu detektieren. Mit modernen Teilchenbeschleunigern (CERN,RHIC..) ist es möglich Temperaturen von 200 MeV und entsprechende Dichten zu erreichen, so daß man dem Phasenübergang sehr nahe kommt oder ihn bereits überschreitet. Der direkte Nachweis jedoch gestaltet sich schwierig, da die Signale, die im Detektor ankommen, zum Großteil aus der Endphase der Reaktion stammen, in der man sich in der hadronischen Phase befindet.

Aus theoretischer Sicht gesehen beschreibt man stark wechselwirkende Materie im Medium mittels effektiver Modelle, die als Freiheitsgrade vielmals nicht mehr Quarks oder Gluonen besitzen, sondern Hadronen. Dabei wird besonders darauf geachtet, daß die effektive Theorie die Symmetrien und Eigenschaften der QCD besitzt, die für das Problem wichtig erscheinen. Das Nambu-Jona-Lasinio (NJL) Modell ist eines dieser Modelle, das chirale Symmetrie und die Wechselwirkungen der Quarks beinhaltet. Ein Erfolg des NJL-Modells ist die Beschreibung der spontanen Symmetriebrechung und das Auftreten von Konstituentenquarks mit Massen von 300 MeV, aus denen dann die Hadronen aufgebaut sind.

Eine Anwendung eines effektiven Modells mit mesonischen Freiheitsgraden in dem das ρ -Meson in dichter und heißer Materie untersucht wurde, zeigte eine starke Modifikation der Breite des ρ -Mesons in dichter und heißer Materie [4]. Diese Modifikation liefert dann auch eine mögliche Erklärung für die Abweichung der im Medium gemessenen Dileptonspektren vom Vakuum [5]. Ähnliche Untersuchungen sind auch für Kaonen, ω - und η -Mesonen durchgeführt worden [6],[7],[8].

Im Rahmen dieser Arbeit geht es um das Verständnis der $\pi\pi$ -Wechselwirkung in dichter und heißer Materie. Das Interesse an dem Verhalten dieser hat mehrere Gründe: Zum einen ist die $\pi\pi$ -Wechselwirkung im skalaren, isoskalaren Kanal verantwortlich für die mittelreichweitige Anziehung der Kerne und somit verantwortlich für das Zusammenhalten dieser. Eine genaue Untersuchung könnte somit weitere Einsichten in die Bindung von Kernen und die nukleare Zustandsgleichung liefern. Darüberhinaus erwartet man von theoretischer Seite, daß aufgrund der chiralen Symmetrie und ihrer Wiederherstellung bei

endlicher Temperatur und Dichte die $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Medium stark genug sein könnte um einen gebundenen Zustand zu erzeugen - das σ -Meson. Im Vakuum ist das σ -Meson, welches den chiralen Partner des Pions darstellt, eine sehr breite $\pi\pi$ -Resonanz mit der Masse von etwa 500 MeV und einer Breite von mehreren hundert MeV, die aufgrund der starken Kopplung an den Zerfall in zwei Pionen zustande kommt. In direkter Beziehung dazu stehen auch Untersuchungen über das chirale Kondensat $\langle\bar{q}q\rangle$. Dieses ist der Ordnungsparameter der chiralen Symmetrie und man weiß aus chiraler Störungstheorie und Gittereichrechnungen, daß das chirale Kondensat $\langle\bar{q}q\rangle$ mit zunehmender Temperatur und Dichte abnimmt, bis es bei dem Phasenübergang in das QGP verschwindet, wobei aber seine Fluktuationen deutlich zunehmen. Das Kondensat lässt sich direkt nicht messen, aber dessen Fluktuationen stehen in direkter Beziehung zu der Spektralfunktion des skalaren, isoskalaren σ -Mesons. Aufgrund dieser Überlegungen erwartet man für die $\pi\pi$ -Wechselwirkung im skalaren, isoskalaren Kanal eine starke Änderung in dichter und heißer Materie. Neben diesen theoretischen Betrachtungen wurden mehrere Experimente durchgeführt [9],[10],[11] um die $\pi\pi$ -Wechselwirkung in Kernen zu untersuchen, die in der Tat eine deutliche Zunahme an Stärke in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung mit zunehmender Dichte ausmachen konnten.

In dieser Arbeit benutzen wir für die Beschreibung der $\pi\pi$ -Wechselwirkung das Lineare σ -Modell. Dieses ist ein effektives hadronisches Modell, welches die chirale Symmetrie berücksichtigt und als Freiheitsgrade zunächst nur Pion und σ -Meson enthält. Besonders wichtig ist es dabei eine nichtperturbative und symmetrieeerhaltende Beschreibung des linearen σ -Modells zu benutzen, da wir an dem durch eine (partielle) Wiederherstellung der chiralen Symmetrie hervorgerufenen Verhalten in der Nähe des Phasenübergangs interessiert sind und dieser Bereich sich im Rahmen von störungstheoretischen Beschreibungen nicht erfassen lässt. Wir benutzen dabei die in [13] entwickelte Methode und stellen diese in Kapitel 2 vor.

Im dritten Kapitel werden dann die Parameter der dem Modell zugrundeliegenden Lagrangedichte an das Vakuum angepaßt, um Größen wie Masse und Breite des σ -Mesons und $\pi\pi$ -Streudaten wiederzugeben.

In Kapitel 4 und 5 schließlich werden der Einfluß von endlicher Temperatur und Dichte auf die Eigenschaften des σ -Mesons und der $\pi\pi$ -Wechselwirkung untersucht. Wichtig dabei ist zunächst, daß durch das Medium die chirale Symmetrie erhalten bleibt. Zudem berücksichtigen wir den endlichen Dreierimpuls des σ -Mesons im Medium und dessen Auswirkungen.

In Kapitel 6 vergleichen wir dann unsere Erkenntnisse mit dem Experiment. Wie bereits beschrieben erwartet man aufgrund der chiralen Symmetrie starke Änderungen der $\pi\pi$ -Wechselwirkung im skalaren, isoskalaren Kanal. Betrachtet man Pionproduktionsexperimente, in denen zwei Pionen mit den Quantenzahlen des σ -Mesons im Ausgangskanal gemessen werden, zeigt die invariante Massenverteilung bei endlicher Dichte deutliche Abweichungen zu den im Vakuum gewonnenen Meßdaten, die als ein Anzeichen für eine teilweise Wiederherstellung der chiralen Symmetrie und den damit verbundenen Modifikationen des skalaren Propagators verstanden werden können. Insbesondere betrachten

wir inwieweit die theoretisch gewonnenen Erkenntnisse über die Modifikationen von Pion, σ -Meson und der $\pi\pi$ -Streuung im Medium die Meßdaten beschreiben können.

Kapitel 2

Das lineare σ -Modell

2.1 Lagrangedichte des Modells

Abweichend von chiraler Störungstheorie, die im Niederenergiebereich der QCD sehr erfolgreich ist, suchen wir ein Modell, daß auch die Unitarität der Streumatrix gewährleisten kann. Es soll außerdem - unter dem Gesichtspunkt der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie im Medium - Aussagen in der Nähe des kritischen Punktes treffen können. Dies ist offensichtlich in einem störungstheoretischen Modell nicht möglich, aufgrund der starken Korrelationen und Wechselwirkungen in der Nähe des Phasenübergangs.

Desweiteren wollen wir die chirale Symmetrie erhalten, die neben der Niederenergiethese auch die Eigenschaft des Pions als Goldstoneboson fest schreibt.

Als hadronisches Modell, welches chiral symmetrisch ist und diese Eigenschaften besitzt, eignet sich das lineare σ -Modell [12].

Im Rahmen dieses Modells wählen wir als nichtstörungstheoretischen Ansatz den aus der Vielteilchenphysik bekannten Hartree-Fock-Bogoliubov Formalismus erweitert um RPA-Fluktuationen [13]. Dieser ist in der Lage, die Symmetrien zu erhalten und die spontane Brechung zu beschreiben.

Im linearen σ -Modell treten als Freiheitsgrade neben den Pionen auch das skalare isoskalare σ -Meson als chiraler Partner des Pions auf. Die Lagrangedichte des linearen $O(N+1)$ σ -Modells ist dabei gegeben durch :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 + (\partial_\mu \sigma)^2] - \frac{\mu_0^2}{2}[\vec{\pi}^2 + \sigma^2] - \frac{\lambda_0^2}{4N}[\vec{\pi}^2 + \sigma^2]^2 + \sqrt{N}c\sigma. \quad (2.1)$$

In dieser Lagrangedichte ist das pseudoskalare Pionfeld $\vec{\pi}$ ein N-komponentiges Vektorfeld. Die Größen μ_0 und λ_0 sind dabei die Masse der Felder und die Kopplungskonstante. Der Parameter c beschreibt die explizite Brechung der chiralen Symmetrie. Man kann sich leicht überzeugen, daß die Lagrangedichte für $c = 0$ invariant unter chiralen Transformationen der Form

$$\phi = \begin{pmatrix} \sigma \\ \vec{\pi} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma \\ \vec{\pi} \end{pmatrix} + \delta\phi, \quad (2.2)$$

mit

$$\delta\phi_j = \delta\omega_\alpha T_{jk}^\alpha \phi^k \quad (2.3)$$

ist. Die T_{jk}^α sind dabei Generatoren der $\mathcal{O}(N+1)$ -Gruppe - reelle, total antisymmetrische $(N+1) \times (N+1)$ -Matrizen.

Der Term proportional c in der Lagrangedichte ist verantwortlich für die explizite Brechung der chiralen Symmetrie. Diese ist die Ursache für die nichtverschwindende Masse des Pions, wie wir später sehen werden.

Der zu der chiralen Symmetrie gehörige Noether Strom

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \quad (2.4)$$

ist für $c = 0$ eine Erhaltungsgröße. Dieser Strom lässt sich in zwei Anteile aufspalten:

$$\begin{aligned} A_\mu^\alpha &= \partial_\mu \phi_0 T_{0j}^\alpha \phi_j + \partial_\mu \phi_i T_{i0}^\alpha \phi_0 = (\partial_\mu \sigma) \vec{\pi}^\alpha - (\partial_\mu \vec{\pi}^\alpha) \sigma, \\ V_\mu^\alpha &= \partial_\mu \pi_i T_{ij}^\alpha \pi_j. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Der Axialvektorstrom A_μ^α enthält das durch die explizite Brechung ausgezeichnete σ -Feld und beschreibt Transformationen der Pionen in ein σ . Dieser Anteil ist im Fall der expliziten Brechung nicht mehr erhalten und man erhält für dessen Änderung:

$$\partial^\mu A_\mu^\alpha = \sqrt{N} c \pi^\alpha. \quad (2.6)$$

Dies ist die sogenannte PCAC-Relation (**P**artial **C**onserved **A**xial **C**urrent), auf die wir in einem späteren Kapitel noch einmal eingehen werden.

Der Vektorstrom V_μ^α hingegen bleibt erhalten. Er beschreibt die verbleibende Symmetrie der Pionen und bewirkt, daß die Massen der Pionen in unserem Modell identisch sind¹.

Aus dem erhaltenen Strom lässt sich eine erhaltene Ladung konstruieren ,

$$Q(t) = \int d^3x j^0. \quad (2.7)$$

Betrachtet man nun die Wirkung des Ladungsoperators Q auf den Vakuumzustand des Systems, so sind 2 Fälle zu unterscheiden :

$$Q|0\rangle = 0 \quad , \quad Q|0\rangle \neq 0. \quad (2.8)$$

Im ersteren Fall spricht man davon, daß die Symmetrie der Lagrangedichte auch eine Symmetrie des Grundzustandes ist. Der Grundzustand, der gegeben ist durch das Minimum des Potentials in der Lagrangedichte, bleibt unter der Symmetrietransformation invariant. Das System befindet sich in der sogenannten Wigner-Weyl Phase. Die Massen

¹Im Experiment sieht man eine Massenaufspaltung zwischen den elektrisch geladenen und neutralen Pionen. Dies ist ein Effekt aus der Quantenelektrodynamik, der in unserem Modell nicht beschrieben werden kann.

von Pion- und σ -Feld sind entartet. Die Symmetrie der Lagrangedichte ist erhalten. Das lineare σ -Modell befindet sich für $\mu_0^2 \geq 0$ in dieser Phase.

Im zweiten Fall ist die Symmetrie der Lagrangedichte keine Symmetrie des Grundzustandes. Man bezeichnet dies als Nambu-Goldstone Phase.

Dieser Fall tritt für $\mu_0^2 \leq 0$ ein. Der Grundzustand des σ -Modells in der Nambu-Goldstone Phase ist entartet und nicht mehr invariant unter einer chiralen Transformation. Durch die Wahl eines bestimmten Grundzustandes aus der Vielfalt der möglichen Grundzustände wird die Symmetrie spontan gebrochen. Durch die explizite Brechung wird von den $(N+1)$ -Feldern der Theorie das σ -Feld ausgezeichnet. Den Grundzustand der Theorie bezeichnet man mit $\langle \sigma \rangle$, welcher der Vakuumerwartungswert des σ -Feldes ist, und entwickelt die Lagrangedichte um dieses Vakuum:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 + (\partial_\mu \tilde{\sigma})^2] - \frac{1}{2}(\mu_0^2 + \frac{\lambda_0^2 \langle \sigma \rangle^2}{N})\vec{\pi}^2 - \frac{1}{2}(\mu_0^2 + \frac{3\lambda_0^2 \langle \sigma \rangle^2}{N})\tilde{\sigma}^2 \\ & - \frac{\lambda_0^2}{4N}(\vec{\pi}^2 + \tilde{\sigma}^2)^2 + \tilde{\sigma}(\sqrt{N}c - \mu_0^2 \langle \sigma \rangle - \frac{\lambda_0^2}{N} \langle \sigma \rangle^3) - \frac{\lambda_0^2 v}{N} \tilde{\sigma}(\vec{\pi}^2 + \tilde{\sigma}^2) + \text{const.} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Größe $\tilde{\sigma} = \sigma - \langle \sigma \rangle$ ist dabei das um $\langle \sigma \rangle$ verschobene σ -Feld.

Aus dieser Lagrangedichte, zusammen mit der Bedingung, daß der Vakuumerwartungswert $\langle \sigma \rangle$ der Grundzustand des Systems ist, folgt für die Massen in niedrigster Ordnung dieser Entwicklung, der Baumgraphennäherung:

$$\begin{aligned} m_\pi^2 &= \mu_0^2 + \frac{\lambda_0^2 \langle \sigma \rangle^2}{N} = \frac{\sqrt{N}c}{\langle \sigma \rangle}, \\ m_\sigma^2 &= \mu_0^2 + \frac{3\lambda_0^2 \langle \sigma \rangle^2}{N} = m_\pi^2 + \frac{2}{N} \lambda_0^2 \langle \sigma \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Daran kann man ablesen, daß im chiralen Limes, wenn die explizite Brechung c verschwindet, die Pionen masselos sind, während das σ -Feld durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert eine Masse erhält. Dies ist eine wichtige Eigenschaft des Modells und Folge des Goldstone Theorems [14], welches besagt, daß für jeden im Vakuum spontan gebrochenen Generator einer kontinuierlichen Symmetrie der Lagrangedichte ein masseloses Goldstone Boson auftritt. Durch die Wahl des Vakuums wurde in unserem Fall die $O(N+1)$ Rotationssymmetrie gebrochen. Die $O(N)$ Rotationsgruppe, die Transformationen der Pionen untereinander beschreibt, ist allerdings weiterhin erhalten, so daß nach der spontanen Brechung von den ursprünglich $N(N+1)/2$ Generatoren der Symmetrie $N(N-1)/2$ Generatoren übrig bleiben. Es wurden folglich N Generatoren gebrochen, und daher müssen N masselose Goldstone Bosonen auftreten - die Pionen. Diese Aufspaltung der Massen von Pion und Sigma lässt sich auch in dem experimentellen Spektrum beobachten. Die Pionen - als Goldstone Bosonen der Theorie - haben eine im Vergleich zu anderen Hadronen sehr geringe Masse von 140 MeV, während das σ -Meson als der chirale Partner des Pions eine Masse von ungefähr 500-600 MeV besitzt [15]².

²Die Einordnung des σ oder $f_0(600)$ wird sehr kontrovers diskutiert. Ungeachtet dessen findet man zum einen in Modellrechnungen als auch durch Analyse der $\pi\pi$ -Streudaten den oben angegebenen Wert für die Masse des f_0 oder σ -Mesons.

2.2 Hartree-Fock-Bogoliubov-Näherung

Um eine realistischere Beschreibung von Pion und σ -Meson zu erhalten, muß man allerdings über die Baumgraphennäherung hinausgehen. Insbesondere das Fehlen einer Breite für das im Vakuum sehr breite σ -Meson ist unrealistisch [15].

In der Hartree-Fock-Bogoliubov-Näherung versucht man, den exakten Grundzustand des Hamiltonoperators durch Quasiteilchen zu beschreiben. Variation des Quasiteilchengrundzustandes erlaubt dann die Bestimmung der Quasiteilchenbasis, in der die Grundzustandsenergie minimal ist.

Zunächst führt man für die Pion- und σ -Felder Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ein:

$$\begin{aligned}\vec{\pi}(\vec{x}) &= \sum_q \frac{1}{\sqrt{V2\omega_q}} (\vec{a}_q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \vec{a}_q^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}), \\ \sigma(\vec{x}) &= \sum_q \frac{1}{\sqrt{V2\omega_q}} (b_q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + b_q^\dagger e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}),\end{aligned}\tag{2.11}$$

die die üblichen bosonischen Vertauschungsrelationen und die Energie-Impuls Beziehung erfüllen

$$\omega_q = \sqrt{m^2 + \vec{q}^2}.\tag{2.12}$$

Zur Bestimmung der Quasiteilchenbasis, die die Grundzustandsenergie minimiert, transformieren wir nun die ursprünglichen Operatoren in Quasiteilchenoperatoren:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\dagger & -V^\dagger \\ -V^T & U^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \mathcal{W}^\dagger \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}.\tag{2.13}$$

Eine Forderung an die Transformationsmatrix \mathcal{W} ist, daß die Quasiteilchen dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen wie die ursprüngliche Teilchenbasis. Aus dieser Forderung folgt nach dem Theorem von Bloch und Messiah [16] eine spezielle Form für die Transformationsmatrix. In unserem Fall wählen wir eine spezielle Bogoliubovtransformation, die die von Bloch und Messiah geforderten Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_q^\dagger &= u_q \vec{a}_q^\dagger - v_q \vec{a}_{-q}, \\ \beta_q^\dagger &= x_q b_q^\dagger - y_q b_{-q} - w^* \delta_{q0}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Die in der Transformation auftretenden Bogoliubovfaktoren u_q , v_q , x_q und y_q hängen nur vom Betrag des Impulses ab und sind im Folgenden zu bestimmen. Der zusätzliche Translationsterm, der in der zweiten Gleichung auftritt, stellt sicher, daß die Erwartungswerte von β_0 und β_0^+ im Vakuum verschwinden, während die Erwartungswerte von b_0 und b_0^+ proportional zum Wert des Kondensates $\langle \sigma \rangle$ sind. Zur Bestimmung der Bogoliubovfaktoren kann man zunächst ausnutzen, daß die oben eingeführten Quasiteilchen dieselben

bosonischen Vertauschungsrelationen erfüllen wie die ursprünglichen Teilchen :

$$\begin{aligned} [\alpha_{qi}, \alpha_{q'j}] &= [\beta_q, \beta_{q'}] = 0, \\ [\beta_q^\dagger, \beta_{q'}] &= \delta_{qq'}, \\ [\alpha_{qi}^\dagger, \alpha_{q'j}] &= \delta_{qq'} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Zusammen mit Gl.(2.14) folgt dann:

$$u_q^2 - v_q^2 = 1, \quad x_q^2 - y_q^2 = 1. \quad (2.16)$$

Den Grundzustand der Quasiteilchenbasis erhält man aus der Forderung $\vec{\alpha}_q |HFB\rangle = \beta_q |HFB\rangle = 0$. Er lässt sich durch die Bogoliubovfaktoren und den Vakuumzustand der ursprünglichen Operatoren folgendermaßen ausdrücken [13]:

$$|HFB\rangle = \exp \left[\sum_q \left(\frac{v_q}{2u_q} \vec{a}_q^\dagger \vec{a}_{-q}^\dagger + \frac{y_q}{2x_q} b_q^\dagger b_{-q}^\dagger \right) + \frac{w}{x_0} b_0^\dagger \right] |0\rangle \equiv e^\Phi |0\rangle. \quad (2.17)$$

Um die Bogoliubovfaktoren und damit die Quasiteilchenbasis zu bestimmen, minimiert man nun den Vakuumerwartungswert $\langle HFB | H | HFB \rangle / \langle HFB | HFB \rangle$. Der Hamiltonoperator, der sich aus der Lagrangedichte berechnen lässt, ist in dieser Quasiteilchenbasis gegeben als

$$\begin{aligned} H &= H_0(v, y, \langle \sigma \rangle) + \eta [\beta_0 + \beta_0^\dagger] + \sum_q \varepsilon_\pi(q) \vec{\alpha}_q^\dagger \vec{\alpha}_q + \sum_q \varepsilon_\sigma(q) \beta_q^\dagger \beta_q \\ &+ \sum_q c_\pi(q) [\vec{\alpha}_q^\dagger \vec{\alpha}_{-q}^\dagger + \vec{\alpha}_q \vec{\alpha}_{-q}] + \sum_q c_\sigma(q) [\beta_q^\dagger \beta_{-q}^\dagger + \beta_q \beta_{-q}] \\ &+ \int d^3x : \left[\frac{\lambda_0^2}{N} \langle \sigma \rangle (\pi^2(x) + \sigma^2(x)) \sigma(x) + \frac{\lambda_0^2}{4N} (\pi^2(x) + \sigma^2(x))^2 \right] : . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} H_0(v, y, \langle \sigma \rangle) &= \sum_q \omega_q (N v_q^2 + y_q^2 + \frac{N+1}{2}) + \frac{\lambda_0^2}{4N} [3I_\sigma^2 + (N^2 + 2N)I_\pi^2 + 2NI_\pi I_\sigma] \\ &+ \frac{\lambda_0^2 \langle \sigma \rangle^2}{2N} [NI_\pi + 3I_\sigma] + \frac{\mu_0^2}{2} \langle \sigma \rangle^2 + \frac{\lambda_0^2}{4N} \langle \sigma \rangle^4 - c\sqrt{N} \langle \sigma \rangle, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\eta = \frac{x_0 + y_0}{\sqrt{\mu}} [\lambda_0^2 \langle \sigma \rangle I_\pi + \frac{3}{N} \lambda_0^2 \langle \sigma \rangle I_\sigma + \frac{\lambda_0^2}{N} \langle \sigma \rangle^3 + \mu_0^2 \langle \sigma \rangle - c\sqrt{N}], \quad (2.20)$$

$$c_\pi(q) = \omega_q (u_q v_q) + \frac{\lambda_0^2 (u_q + v_q)^2}{2} \frac{1}{2\omega_q} \left[\frac{N+2}{N} I_\pi + \frac{1}{N} I_\sigma + \frac{1}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right], \quad (2.21)$$

$$c_\sigma(q) = \omega_q (x_q y_q) + \frac{\lambda_0^2 (x_q + y_q)^2}{2} \frac{1}{2\omega_q} \left[I_\pi + \frac{3}{N} I_\sigma + \frac{3}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right], \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_\pi(q) = \omega_q (u_q^2 + v_q^2) + \lambda_0^2 \frac{(u_q + v_q)^2}{2\omega_q} \left[\frac{N+2}{N} I_\pi + \frac{1}{N} I_\sigma + \frac{1}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right], \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_\sigma(q) = \omega_q (x_q^2 + y_q^2) + \lambda_0^2 \frac{(x_q + y_q)^2}{2\omega_q} \left[I_\pi + \frac{3}{N} I_\sigma + \frac{3}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right]. \quad (2.24)$$

Die Terme proportional zu ε_π und ε_σ liefern bei der Minimierung des Erwartungswertes keinen Beitrag, während die nichtdiagonalen Terme proportional zu η , c_π , c_σ nicht von sich aus verschwinden. Daraus folgt, daß die Grundzustandsenergie genau dann minimal wird, wenn diese Terme keinen Beitrag liefern, also für $c_\pi = c_\sigma = \eta = 0$!

Daraus lassen sich zusammen mit Gl.(2.16), wie in Anhang A gezeigt, zunächst die Bogoliubovfaktoren berechnen und damit schließlich 3 BCS-Gleichungen für die Quasiteilchenmassen und das Kondensat ableiten:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\pi^2(0) &= \mu_0^2 + \lambda_0^2 \left[\frac{N+2}{N} I_\pi + \frac{1}{N} I_\sigma + \frac{1}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right], \\ \varepsilon_\sigma^2(0) &= \mu_0^2 + \lambda_0^2 \left[I_\pi + \frac{3}{N} I_\sigma + \frac{3}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right], \\ \frac{c\sqrt{N}}{\langle \sigma \rangle} &= \mu_0^2 + \lambda_0^2 \left[I_\pi + \frac{3}{N} I_\sigma + \frac{1}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right],\end{aligned}\tag{2.25}$$

mit

$$I_\pi = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(u_q + v_q)^2}{2\omega_q}, \quad I_\sigma = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(x_q + y_q)^2}{2\omega_q}.\tag{2.26}$$

Hierbei sind I_π und I_σ quadratisch divergente Integrale über die Tadpole-Loops, wobei die q_0 -Integration bereits ausgeführt wurde. Zur Regularisierung der Tadpole-Loops wählen wir die im Anhang B dargestellte Methode von Pauli-Villars [17].

Kombiniert man die Gleichung für das Kondensat mit den Quasiteilchenmassen, erhält man

$$\begin{aligned}\varepsilon_\pi^2(0) &= \frac{c\sqrt{N}}{\langle \sigma \rangle} + \frac{2\lambda_0^2}{N} [I_\pi - I_\sigma], \\ \varepsilon_\sigma^2(0) &= \frac{c\sqrt{N}}{\langle \sigma \rangle} + \frac{2\lambda_0^2}{N} \langle \sigma \rangle^2.\end{aligned}\tag{2.27}$$

In der Hartree-Fock-Bogoliubov Näherung sind die Pionen im chiralen Limes nicht mehr masselos, da die Quasipionmasse proportional zu der Differenz $I_\pi - I_\sigma$ ist, die auch im chiralen Limes einen endlichen Wert besitzt. Dies stellt jedoch eine Verletzung des oben erwähnten Goldstone Theorems dar, welches masselose Goldstone Bosonen als Folge der spontan gebrochenen chiralen Symmetrie forderte. Um das Goldstone Theorem zu erfüllen und die Pionen wieder masselos zu machen, muß man über die HFB-Näherung hinausgehen. Aus der Vielteilchenphysik ist bekannt, daß die Methode der RPA(**R**andom **P**hase **A**pproximation) die von der Hartree-Fock-Bogoliubov Näherung gebrochene Symmetrie wiederherstellen kann [18]. Daher wollen wir im nächsten Abschnitt die Methode vorstellen und zeigen, daß dadurch das Goldstone Theorem wieder erfüllt werden kann.

2.3 „Random-Phase-Approximation“

In der RPA Methode betrachtet man die wohlbekannte RPA-Bewegungsgleichung [19] :

$$\langle 0 | [\delta Q_\nu, [H, Q_\nu^\dagger]] | 0 \rangle = \Omega_\nu \langle 0 | [\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger] | 0 \rangle . \quad (2.28)$$

Ω_ν ist die Energiedifferenz zwischen dem Zustand ν und dem Grundzustand, Q_ν, Q_ν^\dagger der zugehörige Vernichtungs- bzw Erzeugungsoperator. Im Allgemeinen ist dieser ein komplizierter Vielteilchenoperator, für den man die Bewegungsgleichung nicht exakt lösen kann. Die Variation von Q_ν erfolgt dabei nach den zugrunde liegenden Anregungsoperatoren. Die Näherung der RPA besteht darin, diese allgemeinen Vielteilchenoperatoren auf Ein- und Zweiteilchenoperatoren einzuschränken. Das Vakuum dieser Operatoren ist nun der sogenannte RPA Grundzustand :

$$Q_\nu |RPA\rangle = 0 . \quad (2.29)$$

Die Quasi-Boson Approximation nimmt zusätzlich an, daß der RPA Grundzustand durch den Hartree-Fock-Bogoliubov-Grundzustand angenähert werden kann. Die RPA Bewegungsgleichungen lauten somit:

$$\langle HFB | [\delta Q_\nu, [H, Q_\nu^\dagger]] | HFB \rangle = \Omega_\nu \langle HFB | [\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger] | HFB \rangle . \quad (2.30)$$

Betrachtet man den Generator der spontan gebrochenen Symmetrie, die axiale Ladung Q_5^a , erkennt man, daß dieser im chiralen Limes mit dem Hamiltonoperator vertauscht:

$$[H, Q_5^a] = 0 . \quad (2.31)$$

In diesem Fall verschwindet die linke Seite der Bewegungsgleichung, und es existieren Lösungen mit $\Omega_\nu = 0$. Diese Lösungen nennt man „spurious“ und sie können mit den Goldstone Bosonen identifiziert werden.

Um also masselose Goldstone Bosonen zu erhalten, muß nur sichergestellt sein, daß der RPA-Anregungsoperator mit dem Hamiltonoperator vertauscht. Als Ansatz für die allgemeinen Ein- und Zweiteilchen Anregungsoperatoren in der im vorigen Abschnitt eingeführten HFB-Quasiteilchenbasis wählen wir :

$$\begin{aligned} \vec{Q}_\pi^\dagger &= X_\pi^1 \vec{\alpha}_0^\dagger - Y_\pi^1 \vec{\alpha}_0 + \sum_q \left[X_\pi^2(q) \beta_q^\dagger \vec{\alpha}_{-q}^\dagger - Y_\pi^2(q) \beta_{-q} \vec{\alpha}_q \right] \\ Q_\sigma^\dagger &= \left[X_\sigma^1 \beta_0^\dagger - Y_\sigma^1 \beta_0 \right] + \sum_q \left[X_\sigma^2(q) \beta_q^\dagger \beta_{-q}^\dagger - Y_\sigma^2(q) \beta_{-q} \beta_q \right] \\ &\quad + \sum_q \left[X_\sigma^3(q) \vec{\alpha}_q^\dagger \vec{\alpha}_{-q}^\dagger - Y_\sigma^3(q) \vec{\alpha}_{-q} \vec{\alpha}_q \right] . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Der Symmetriegenerator der spontan gebrochenen Symmetrie Q_5^a in derselben Basis hat folgende Form :

$$Q_5^a = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{2\varepsilon_\pi(0)}} i\varepsilon_\pi(0)\langle\sigma\rangle[\alpha_0^{a\dagger} - \alpha_0^a] + \sum_q i \frac{\varepsilon_\pi(q) - \varepsilon_\sigma(q)}{\sqrt{4\varepsilon_\pi(q)\varepsilon_\sigma(q)}} [\beta_q^\dagger \alpha_{-q}^{a\dagger} - \beta_{-q} \alpha_q^a] \\ + \sum_q i \frac{\varepsilon_\pi(q) + \varepsilon_\sigma(q)}{\sqrt{4\varepsilon_\pi(q)\varepsilon_\sigma(q)}} [\beta_q \alpha_q^{a\dagger} - \beta_{-q}^\dagger \alpha_{-q}^a]. \quad (2.33)$$

Dieser unterscheidet sich von dem RPA Operator $Q_\pi^{a\dagger}$ nur in den Termen proportional $\beta_q \alpha_q^{a\dagger}$ und $\beta_{-q}^\dagger \alpha_{-q}^a$. Setzt man allerdings Q_5^a in Gl.(2.30) ein, geben diese Terme aufgrund der Diagonalität des Einteilchenanteils des Hamiltonoperators in der HFB Quasiteilchenbasis keinen Beitrag zu den RPA Gleichungen.

Berechnet man nun die in der Bewegungsgleichung auftretenden Kommutatoren für die Anregungsoperatoren des Pions und σ mit dem Hamiltonoperator, führt dies auf ein Eigenwertproblem für das Pion und σ -Meson. Als Lösung der dabei auftretenden Eigenwertgleichungen erhält man schließlich die Massengleichungen für das Pion [20]:

$$m_\pi^2 = \frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} + \frac{2\lambda_0^2}{N} \frac{[\varepsilon_\pi^2(0) - \varepsilon_\sigma^2(0)][\Sigma_{\pi\sigma}(0) - \Sigma_{\pi\sigma}(m_\pi^2)]}{1 - \frac{2\lambda_0^2}{N}\Sigma_{\pi\sigma}(m_\pi^2)}. \quad (2.34)$$

wobei $\Sigma_{\pi\sigma}(p^2)$ die Pion- σ -Schleife ist,

$$\Sigma_{\pi\sigma}(p^2) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - \varepsilon_\pi^2(0) + i\eta} \frac{1}{(p-q)^2 - \varepsilon_\sigma^2(0) + i\eta}. \quad (2.35)$$

Analog kann man die Masse des σ -Mesons berechnen :

$$m_\sigma^2 = \varepsilon_\sigma^2(0) + 2 \frac{\lambda_0^4}{N} \langle\sigma\rangle^2 \frac{\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2) + \frac{9}{N}\Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2) - 6\lambda_0^2 \frac{N+3}{N^2} \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2) \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}{[1 - \frac{N+2}{N}\lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)][1 - \frac{3}{N}\lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)] - \frac{1}{N}\lambda_0^4 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2) \Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2)}. \quad (2.36)$$

$\Sigma_{\pi\pi}$ und $\Sigma_{\sigma\sigma}$ sind die entsprechenden $\pi\pi$ - und $\sigma\sigma$ -Schleifen:

$$\Sigma_{\pi\pi}(p^2) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - \varepsilon_\pi^2(0) + i\eta} \frac{1}{(p-q)^2 - \varepsilon_\pi^2(0) + i\eta}, \\ \Sigma_{\sigma\sigma}(p^2) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - \varepsilon_\sigma^2(0) + i\eta} \frac{1}{(p-q)^2 - \varepsilon_\sigma^2(0) + i\eta}. \quad (2.37)$$

Im Gegensatz zur Pion- und σ -Masse bleibt das Kondensat $\langle\sigma\rangle$ durch die Hinzunahme der RPA-Fluktuationen unverändert.

Betrachtet man die Massengleichung für das Pion zeigt sich, daß im chiralen Grenzfall ($c = 0$) Gl.(2.34) durch masselose Pionen erfüllt wird, wie es vom Goldstone Theorem gefordert wird. Hier zeigt sich, daß durch das Hinzufügen der RPA in der Tat die Symmetrie erhalten wird. Es treten „spuriöse“ Lösungen für das Pion auf.

2.4 Die 1/N-Entwicklung

In den vorherigen Abschnitten haben wir das lineare σ -Modell mit $N + 1$ Freiheitsgraden untersucht. Die ursprünglich vorhandene $\mathcal{O}(N + 1)$ Symmetrie der Felder wurde - neben der expliziten Brechung - spontan durch das Vorhandensein eines nichtverschwindenden Vakuumerwartungswertes des σ -Mesons gebrochen, wodurch dieses eine endliche Masse erhielt, während N Pionen masselos wurden, in Übereinstimmung mit dem Goldstone Theorem. In diesem Abschnitt wollen wir den Grenzfall $N \rightarrow \infty$ betrachten. Dieser Grenzfall, der zunächst unmotiviert erscheint, erfüllt zwei wichtige Eigenschaften. Zum einen ist er nicht störungstheoretisch in der Kopplungskonstante und erlaubt die Beschreibung von gebundenen Zuständen sowie die Untersuchung von Eigenschaften in der Nähe des Phasenübergangs. Zum anderen konnte in [21] gezeigt werden, daß eine systematische 1/N-Entwicklung in jeder Ordnung die chirale Symmetrie erhält, und die chiralen Wardidentitäten erfüllt.

Diese für das lineare σ -Modell von Lee und Symanzik gezeigten Identitäten [22],[23], folgen aus der zugrundeliegenden chiralen Symmetrie des Modells und stellen exakte Beziehungen zwischen den (n-1)-Punkt und n-Punkt Funktionen der Theorie her. Die Lee-Symanzik Identität niedrigster Ordnung ist die Realisierung des Nambu-Goldstone Theorems:

$$D_\pi^{-1}(0) = \frac{c}{\langle \hat{\sigma} \rangle}, \quad (2.38)$$

welches die Pionmasse mit dem Wert des Kondensates verknüpft ³.

Für den $\sigma\pi\pi$ -Vertex ergibt sich in nächsthöherer Ordnung:

$$T_{\sigma\pi\pi}(p) = \frac{D_\sigma^{-1}(p^2) - D_\pi^{-1}(p^2)}{\langle \sigma \rangle}. \quad (2.39)$$

Die $\pi\pi$ -Streumatrix schließlich steht in folgender Beziehung zur Dreipunktfunktion $T_{\sigma\pi\pi}(p)$:

$$\langle \sigma \rangle T_{\pi\pi}(p) = T_{\sigma\pi\pi}(p) \frac{D_\pi^{-1}(p^2)}{D_\sigma^{-1}(p^2)}. \quad (2.40)$$

Kombiniert man diese beiden chiralen Wardidentitäten erhält man für die Streumatrix folgenden, nur noch von den Ein- und Zweipunktfunktionen abhängigen, Ausdruck

$$T_{\pi\pi}(E, \vec{p}) = \frac{D_\pi^{-1}(E, \vec{p}) - D_\sigma^{-1}(E, \vec{p})}{\langle \sigma \rangle^2} \frac{D_\sigma(E, \vec{p})}{D_\pi(E, \vec{p})}. \quad (2.41)$$

Eine grafische Darstellung dieser Identitäten ist in Abb. 2.1 zu sehen [24]. Betrachtet

³Die Größe $\langle \hat{\sigma} \rangle$ wurde hier eingeführt anstelle des Kondensates $\langle \sigma \rangle$. Diese ist das mit der Zahl der Pionfelder skalierte Kondensat. $\langle \hat{\sigma} \rangle = \frac{\langle \sigma \rangle}{\sqrt{N}}$. Im weiteren Verlauf benutzen wir wieder $\langle \sigma \rangle$ für das Kondensat, verstehen darunter aber immer das skalierte Kondensat.

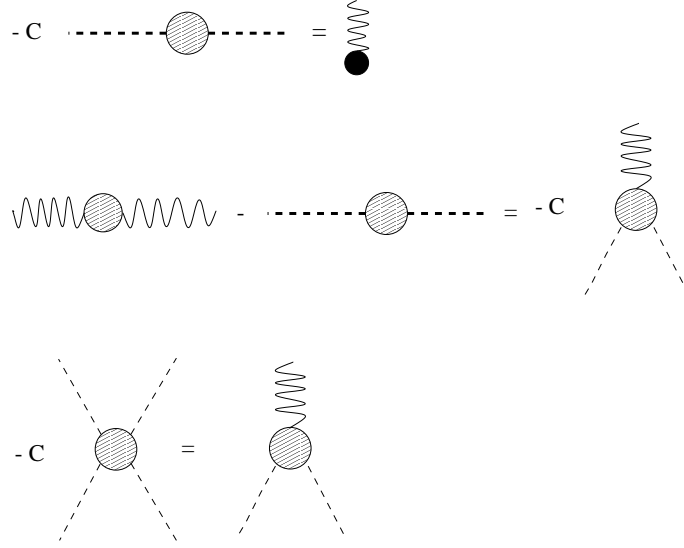


Abbildung 2.1: Grafische Darstellung der Ward-Identitäten in unserem Modell. C steht dabei für den Wert des Kondensates $\langle\sigma\rangle$. Die gestrichelte Linie ist das Pion, und die Wellenlinie beschreibt ein σ -Meson.

man nun den Grenzfall ($N \rightarrow \infty$), erhält man aus den im vorigen Kapitel hergeleiteten Gleichungen in führender Ordnung der $1/N$ Entwicklung folgende sogenannten Dyson-Gleichungen für das Pion und σ -Meson:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\langle\sigma\rangle} &= \mu_0^2 + \lambda_0^2 [I_\pi + \langle\sigma\rangle^2], \\
m_\pi^2 &= \varepsilon_\pi^2(0) = \frac{c}{\langle\sigma\rangle}, \\
m_\sigma^2 &= \frac{c}{\langle\sigma\rangle} + 2\lambda_0^2 \langle\sigma\rangle^2 + 2\lambda_0^4 \langle\sigma\rangle^2 \frac{\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)} \\
&= \varepsilon_\sigma^2(0) + 2\lambda_0^4 \langle\sigma\rangle^2 \frac{\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

In dieser Näherung ist die Masse des Pions gleich dem Wert in der Baumgraphennäherung. Die Beiträge der RPA-Fluktuationen zum Pion heben sich mit dem Beitrag aus der HFB-Näherung auf und verschwinden in niedrigster Ordnung der Entwicklung, während die Masse des σ -Mesons durch die RPA-Fluktuationen modifiziert ist. In Abb. 2.2 sieht man die Berechnung von π , $\langle\sigma\rangle$ und σ veranschaulicht. Deutlich erkennt man, daß die RPA-Fluktuationen für das σ -Meson einen Beitrag liefern, während sie auf das Pion keinen Einfluß haben.

Kombiniert man die beiden Gapgleichungen für die Massen, erhält man folgende Bezie-

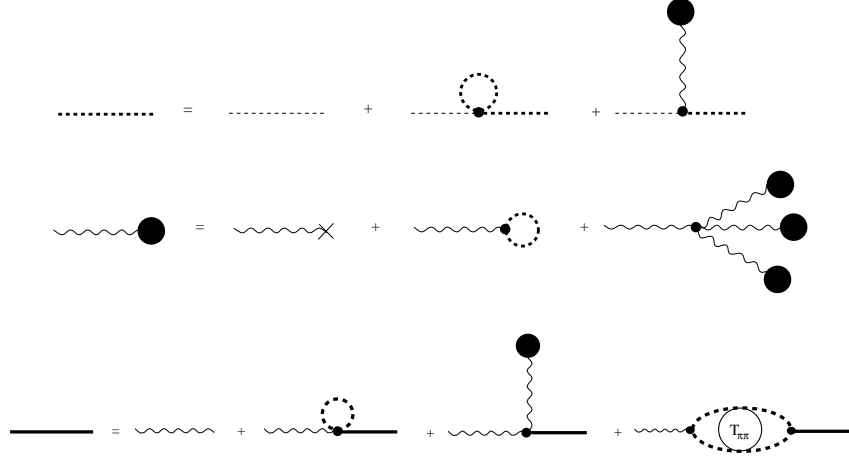


Abbildung 2.2: Grafische Darstellung von Pion, Kondensat $\langle\sigma\rangle$ und σ -Meson in der $1/N$ -Entwicklung. Die dünne gestrichelte und gewellte Linie beschreiben dabei den freien Pion und σ -Propagator, während die dickeren Linien jeweils den vollen Propagator darstellen.

hung zwischen den Massen:

$$m_\sigma^2 - m_\pi^2 = \frac{2\lambda_0^2 \langle\sigma\rangle^2}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}. \quad (2.43)$$

Anhand dieser Gleichung kann man ablesen, daß die Massendifferenz zwischen Pion und σ -Meson direkt proportional dem Wert des Kondensates ist und daher direkte Folge der spontanen Symmetriebrechung ist.

2.5 $\pi\pi$ -Streuung und chirale Symmetrie

Im vorherigen Kapitel sind die Dyson-Gleichungen für die π - und σ -Mesonen hergeleitet worden. Bei der Bestimmung der σ -Masse in führender Ordnung der $1/N$ -Entwicklung traten dabei weitere Beiträge durch die $\pi\pi$ RPA-Fluktuationen auf (Abb. 2.2). Diese enthalten die $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix, deren explizite Form wir in Abschnitt 3.1 im Detail untersuchen. Im Folgenden wollen wir zunächst bestimmte Grenzfälle der Pionstreuung betrachten, für die man Aussagen über die $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix treffen kann.

Weinberg [25] konnte zeigen, indem er sowohl die im vorigen Abschnitt hergeleitete PCAC-Beziehung, als auch die Operatoralgebra des linearen σ -Modells ausnutzte, daß die Niederenergie $T_{\pi\pi}$ -Streuamplitude gegeben ist durch

$$T_{\pi\pi}^{ab} = -\frac{1}{f_\pi^2} [(s - m_\pi^2) \delta^{ab} \delta^{cd} + (t - m_\pi^2) \delta^{ac} \delta^{bd} + (u - m_\pi^2) \delta^{ad} \delta^{bc}] + O(q^4). \quad (2.44)$$

Hierbei ist f_π die pionische Zerfallskonstante, die ein Maß für den schwachen Zerfall von Pionen ist und im Vakuum einen Wert von 93 MeV besitzt. Bei der Herleitung von

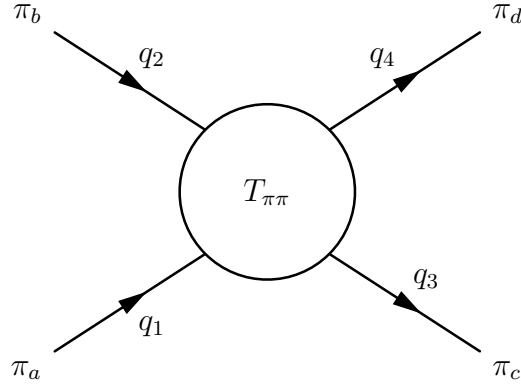


Abbildung 2.3: Darstellung der Streuung von zwei Pionen.

Gl.(2.44) wurde ausgenutzt, daß der Impuls q der Pionen gegenüber den in der Hadronenphysik üblichen Energieskalen, wie etwa der ρ - oder der Nukleonmasse, klein ist und es wurde nach Ordnungen des Impulses entwickelt.

Die Indizes a-d beschreiben, wie in Abb. 2.3 gezeigt, die Pionen, und s, t, u sind die Mandelstam-Variablen. Diese sind definiert als

$$\begin{aligned} s &= (q_a + q_b)^2 = (q_c + q_d)^2, \\ t &= (q_a - q_c)^2 = (q_b - q_d)^2, \\ u &= (q_a - q_d)^2 = (q_b - q_c)^2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Betrachten wir nun die Streuung zweier reeller Pionen im skalaren isoskalaren Kanal. An der Schwelle verschwinden die Dreierimpulse der Pionen und die Mandelstam Variablen für den Streuprozess sind gegeben durch $s = 4m_\pi^2, t = u = 0$.

Die Streumatrix berechnet sich dann mit Gl.(2.44) zu

$$T_{\pi\pi}^{00}(s = 4m_\pi^2, t = u = 0) = -7 \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2}. \quad (2.46)$$

Die zugehörige Streulänge ist gegeben durch

$$a_0^0 = -\frac{T_{\pi\pi}^{00}}{32\pi m_\pi} \approx 0.16 m_\pi^{-1}. \quad (2.47)$$

Verglichen mit dem experimentellen Wert von $a_0^0 \approx (0.20 \pm 0.01) m_\pi^{-1}$ ist diese zu klein. Diese Differenz rührt daher, daß Weinberg nur die führende Ordnung in den Pionimpulsen betrachtet hat. Man gelangt im Rahmen der chiralen Störungstheorie zu einer besseren Abschätzung wenn man Terme nächsthöherer Ordnung in q^2 berücksichtigt.

Nimmt man zusätzlich an, daß eines der einlaufenden Pionen „soft“ ist, d.h. $q^2 = 0$, was sich streng genommen nur im chiralen Limes realisieren lässt, erhält man das Theorem von Adler:

$$T_{\pi\pi}^{00}(s = t = u = m_\pi^2) = 0. \quad (2.48)$$

Die Streuamplitude verschwindet folglich bei der Streuung zweier Pionen, wenn für eines der Pionen $q^2 = 0$ gilt.

Betrachtet man schließlich die Streuung eines weichen Pions mit einem reellen Pion ($q^2 = m_\pi^2$), also unter den kinematischen Bedingungen $s = u = m_\pi^2$ und $t = 0$, ergibt sich für die Streumatrix

$$T_{\pi\pi}^{00}(s = u = m_\pi^2, t = 0) = \frac{m_\pi^2}{f_\pi^2}. \quad (2.49)$$

Verglichen mit Gl.(2.46) fällt ein Vorzeichenwechsel in der Streumatrix von attraktiv an der Schwelle hin zu repulsiv für „off-shell“-Teilchen auf. Dies sind Teilchen die sich unterhalb ihrer Massenschale befinden, also die Energie-Impuls Beziehung aus Gl.(2.12) nicht erfüllen.

Diese aufgrund der chiralen Symmetrie getroffenen Vorhersagen wollen wir dann in Abschnitt 3.3 mit den Ergebnissen aus unserem Modell vergleichen.

Kapitel 3

Das σ -Meson im Vakuum

3.1 Fixierung der Parameter

Bei der Beschreibung des Modells traten im vorherigen Kapitel mehrere Parameter auf die im Folgenden zu bestimmen sind. Zum einen enthält die Lagrangedichte des Linearen σ -Modells drei freie Parameter: μ_0, λ_0 und c . Daneben treten bei der Berechnung von Pion, σ -Meson und Kondensat divergente Integrale auf, die durch Einführung einer schweren Regulatormasse Λ regularisiert werden. Ziel ist es diese Parameter so zu wählen, daß die Massen von π und σ und der Wert des Kondensates $\langle\sigma\rangle$ in guter Übereinstimmung mit dem Experiment sind. Darüberhinaus sollen auch die Streuphasen von zwei Pionen, die die Quantenzahlen des σ -Mesons tragen, gut mit dem Experiment übereinstimmen. Für das Kondensat gilt im Vakuum:

$$\langle\sigma\rangle = f_\pi = 93\text{MeV}. \quad (3.1)$$

Der Wert des Kondensates ist über die Gapgleichung (2.42) an den Parameter μ_0^2 und den Wert des Tadpole gekoppelt. Mit der Wahl der schweren Regulatormasse von 1.2 GeV ist der Wert des Tadpoles eindeutig festgelegt und man erhält mit dem Kondensat aus Gl.(3.1) einen Wert von $\mu_0^2 \approx -(1.5\text{GeV})^2$.

Aus den Gapgleichungen sieht man, daß die Pionmasse direkt proportional dem Brechungsparameter c und dem Wert des Kondensates ist. Die experimentelle Masse des Pions liegt zwischen 139.6 MeV für die geladenen Pionen und 135 MeV für das neutrale Pion [15]. Der Massenunterschied ist vor allem eine Folge von elektromagnetischen Effekten, die wir allerdings nicht berücksichtigen wollen. Wir benutzen den experimentellen Wert von 139.6 MeV für alle 3 Pionen. Damit ergibt sich für den Brechungsparameter nach Festlegung des Kondensates der Wert $c = m_\pi^2 f_\pi$.

Für die Kopplungskonstante λ_0 schließlich läßt sich mit Gl.(2.42) eine Beziehung aus der Masse des σ -Quasiteilchens, der π -Masse und dem Kondensat $\langle\sigma\rangle$ herstellen :

$$2\lambda_0^2 = \frac{\varepsilon_\sigma^2(0) - \varepsilon_\pi^2(0)}{\langle\sigma\rangle^2}. \quad (3.2)$$

Der Parameter ε_σ wird auf den Wert 1 GeV festgesetzt. Diese Wahl des Parameters führt zu einer effektiven Masse des σ -Mesons von etwa 550 MeV, was sehr gut mit dem in anderen Modellen erzielten Wert für die σ -Masse übereinstimmt [15],[26], wodurch dann auch der Parameter λ_0 bestimmt ist.

Zur Berechnung der $\pi\pi$ -Streuphasen müssen wir zunächst die $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix konstruieren. Diese tritt bereits in der Dyson-Gleichung (Gl.(2.42)) für das σ -Meson auf und ist gegeben durch eine Lippmann-Schwinger Gleichung [21]:

$$T_{\pi\pi}(E, \vec{p}) = V_{\pi\pi}(E, \vec{p}) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_{\pi\pi}(E, \vec{p}) G_{\pi\pi}^0(E, \vec{p}, \vec{q}) T_{\pi\pi}(E, \vec{p}). \quad (3.3)$$

Die kinematischen Variablen E und \vec{p} sind Energie und Impuls des Pionpaares und $G_{\pi\pi}^0(E, \vec{p})$ der Zweipionpropagator

$$\begin{aligned} G_{\pi\pi}^0(E, \vec{p}, \vec{q}) &= i \int \frac{dq_0}{2\pi} D_\pi(q) D_\pi(p - q) \\ &= \frac{\omega_q + \omega_{pq}}{2\omega_q \omega_{pq}} \frac{1}{E^2 - (\omega_q + \omega_{pq})^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Hierbei sind $\omega_q = \sqrt{m_\pi^2 + \vec{q}^2}$ und $\omega_{pq} = \sqrt{m_\pi^2 + (\vec{p} - \vec{q})^2}$ die Energien der beiden streuenden Pionen.

Die Übergangsmatrix $V_{\pi\pi}(E, \vec{p})$ in führender Ordnung der $1/N$ -Entwicklung erhält man aus den RPA-Gleichungen:

$$V_{\pi\pi}(E, \vec{p}) = 2\lambda_0^2 \frac{s - m_\pi^2}{s - m_\sigma^2}. \quad (3.5)$$

Die Lösung der oben angegebenen Lippmann-Schwinger Gleichung hat folgende algebraische Form :

$$T_{\pi\pi}(E, \vec{p}) = \frac{V_{\pi\pi}(E, \vec{p})}{1 - \frac{1}{2} V_{\pi\pi}(E, \vec{p}) \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})}. \quad (3.6)$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß die Integration sich nur auf den Zweipionpropagator bezieht und diese durch die in Gl.(2.37) eingeführte Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ gegeben ist.

Durch Einsetzen des Potentials und Anwendung von Gl.(3.2) kann man die Streumatrix auch mittels der Propagatoren von π - und σ -Meson ausdrücken, und man erhält die in Gl.(2.41) angegebene Form für die Streumatrix¹. Die Propagatoren, die zur Bestimmung der $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix benötigt werden, lassen sich dabei direkt aus den Gapgleichungen für die Massen ablesen:

$$\begin{aligned} D_\pi(E, \vec{p}) &= \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m_\pi^2}, \\ D_\sigma(E, \vec{p}) &= \left[E^2 - \vec{p}^2 - \varepsilon_\sigma^2 - \frac{2\lambda_0^4 \langle \sigma \rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹Eine genaue Herleitung dieser Identität ist in Anhang A zu sehen.

Im Vakuum kann aufgrund der Lorentzinvarianz der σ -Propagator im Schwerpunktsystem, also bei $\vec{p} = 0$, ausgerechnet werden. In diesem Fall lässt sich die \vec{q} -Integration des Schleifenintegrals $\Sigma_{\pi\pi}$ ausführen, und man erhält

$$\Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{0}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{\omega_q} \frac{1}{E^2 - 4\omega_q^2}, \quad (3.8)$$

Das verbleibende Integral ist logarithmisch divergent und wird von uns mittels eines Formfaktors regularisiert,

$$v(q) = g \left(\frac{1}{1 + \frac{q^2}{Q_d^2}} \right)^\alpha. \quad (3.9)$$

Ein Formfaktor wurde von uns an dieser Stelle gewählt, um durch die Anpassung der Parameter des Formfaktors eine gute Beschreibung an die Streuphasen zu erhalten. Rechnungen haben gezeigt, daß mit einer Regularisierung über einen Abschneideparameter die Streuphasen nur ungenügend beschrieben werden können. Um aber eine gute Beschreibung der $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Medium zu erhalten, ist eine möglichst genaue Wiedergabe der Streudaten im Vakuum wichtig. Die Bestimmung der im Formfaktor auftretenden Parameter erfolgt dabei im folgenden Abschnitt 3.2. Damit sind sowohl die Streumatrix als auch die Propagatoren bestimmt.

Im folgenden Abschnitt wollen wir nun die Streumatrix benutzen um die Streuphasen zu berechnen und diese mit dem Experiment zu vergleichen.

3.2 Streuphasen

Aus der Streumatrix im skalaren isoskalaren Kanal erhält man die zugehörigen Streuphasen mittels folgender Gleichung :

$$2iT^{00} = \frac{1}{|\vec{q}|} [\exp(2i\delta^{00}) - 1] \quad (3.10)$$

Formt man diese Gleichung nach den Streuphasen um, ergibt sich:

$$\delta^{00} = \arctan\left(\frac{\text{Im}T^{00}}{\text{Re}T^{00}}\right). \quad (3.11)$$

Aus Vergleich mit der Lippmann-Schwinger-Gleichung sieht man, daß die Streumatrix aus Konsistenzgründen mit dem gleichen Formfaktor zu versehen ist, wie die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ in Gl.(3.9), um die Symmetrie zu erhalten. Anstatt diesen Formfaktor zu verwenden hatten wir zunächst die Möglichkeit untersucht die Austauschgraphen - den t - und u -Kanal - bei der Berechnung der Streumatrix zu berücksichtigen. Diese liefern einen repulsiven Beitrag zur T -Matrix (siehe auch Gl.(2.44)) und man kann eine gute Beschreibung der Streudaten unter Einbeziehung dieser und einer Pauli-Villars Regularisierung erhalten. Allerdings

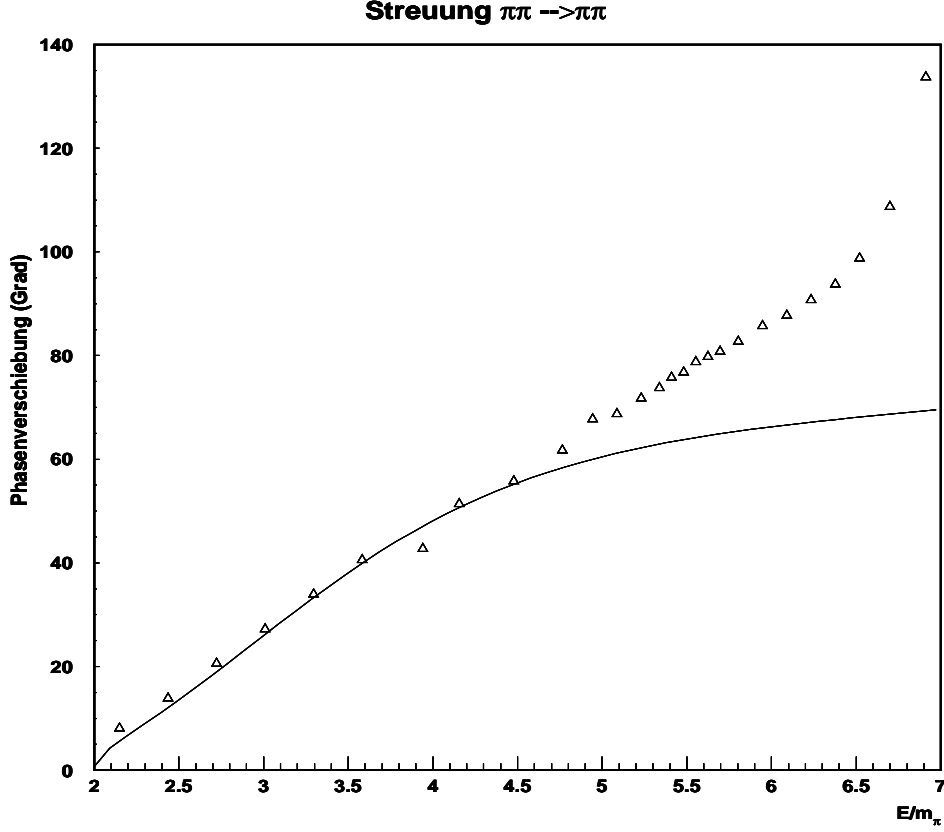


Abbildung 3.1: Die s -Wellen Phasenverschiebung im $I=J=0$ Kanal des Modells (durchgezogene Linie), sowie experimentelle Daten aus [27].

sind diese Beiträge nächsthöherer Ordnung in der $1/N$ -Entwicklung und würden somit die Symmetrie zerstören.

Daher benutzen wir den Ansatz mit dem Formfaktor und erhalten für die Streumatrix:

$$T_{\pi\pi}(E, \vec{p}, q, q') = \frac{v(q)V_{\pi\pi}(E, \vec{p})v(q')}{1 - \frac{1}{2}V_{\pi\pi}(E, \vec{p})\Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})}. \quad (3.12)$$

Hierbei sind q und q' die Impulse der ein und auslaufenden Pionen im Schwerpunktsystem. Eine gute Beschreibung der Phasenverschiebung erhält man für folgende Werte der Parameter des Formfaktors.

$$\begin{aligned} g &= 0.9, \\ Q_D &= 1.2 \text{ GeV}, \\ \alpha &= 3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Der Vergleich mit den experimentellen Streudaten ist in Abb. 3.1 dargestellt. Für Energien bis zur fünffachen Pionmasse beschreibt die Streumatrix die experimentellen Daten sehr gut. Für höhere Energien hingegen lassen sich deutliche Abweichungen feststellen. Diese lassen sich zum Teil dadurch erklären, daß Kopplungen an den $K\bar{K}$ -Kanal nicht berücksichtigt werden, die bei diesen Energien wichtig werden [28].

3.3 Der σ -Propagator

Mit den im vorherigen Abschnitt fixierten Parametern lassen sich nun der σ -Propagator und die $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix berechnen. Der Propagator ist gegeben durch:

$$D_\sigma(E, \vec{p}) = \left[E^2 - \vec{p}^2 - \varepsilon_\sigma^2 - \frac{2\lambda_0^4 \langle \sigma \rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})} \right]^{-1}. \quad (3.14)$$

Daraus ergibt sich für die Selbstenergie des σ -Mesons

$$\Sigma_\sigma(E, \vec{p}) = \frac{2\lambda_0^4 \langle \sigma \rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})}. \quad (3.15)$$

Aufgrund der Lorentzinvarianz des Vakuums können wir alle Größen bei verschwindendem Dreierimpuls berechnen, wodurch sich der numerische Aufwand deutlich reduziert. Die $\Sigma_{\pi\pi}$ -Schleife sowie die volle Selbstenergie des σ -Mesons sind in Abb. 3.2 gezeigt. Die Imaginärteile der Selbstenergien erhalten erst für Energien oberhalb der Schwelle für die Produktion von zwei Pionen einen Beitrag, da das σ -Meson unterhalb dieser Schwelle im Vakuum nicht zerfallen kann. Der Imaginärteil von $\Sigma_{\pi\pi}$ zeigt dann einen Anstieg bis etwa 550 MeV, bis er dann für höhere Energien wieder langsam abfällt (oben rechts). Im Imaginärteil der Selbstenergie Σ_σ ist dieses Maximum jedoch nicht vorhanden. Man beobachtet einen kontinuierlichen Anstieg des Imaginärteiles als Funktion der Energie (unten rechts).

Der Realteil der Selbstenergie Σ_σ ist über den gesamten betrachteten Energiebereich negativ und bewirkt eine Änderung der „nackten“ Masse des σ -Mesons von 1 GeV hin zu niedrigeren Energien (unten links).

Der Propagator des σ -Mesons schließlich ist zusammen mit der $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix in Abb. 3.3 gezeigt. Im oberen Teil sieht man Real- und Imaginärteil des Propagators. Der Imaginärteil hat aufgrund der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ erst Beiträge ab der Produktionsschwelle für zwei Pionen. Zur Bestimmung der Masse und Breite des σ -Mesons vergleicht man den Propagator mit der sogenannten Breit-Wigner-Form, die gegeben ist durch:

$$D_\sigma^{-1}(E, \vec{p}) = p^2 - m_\sigma^2 + i\Gamma(p)m_\sigma \quad (3.16)$$

Damit kann man die effektive Masse des σ -Mesons zu 530 MeV bestimmen. Die Breite in dieser Parametrisierung beträgt etwa 500 MeV.

Alternativ kann man die sogenannte Halbwertsbreite bestimmen. Diese ist definiert als

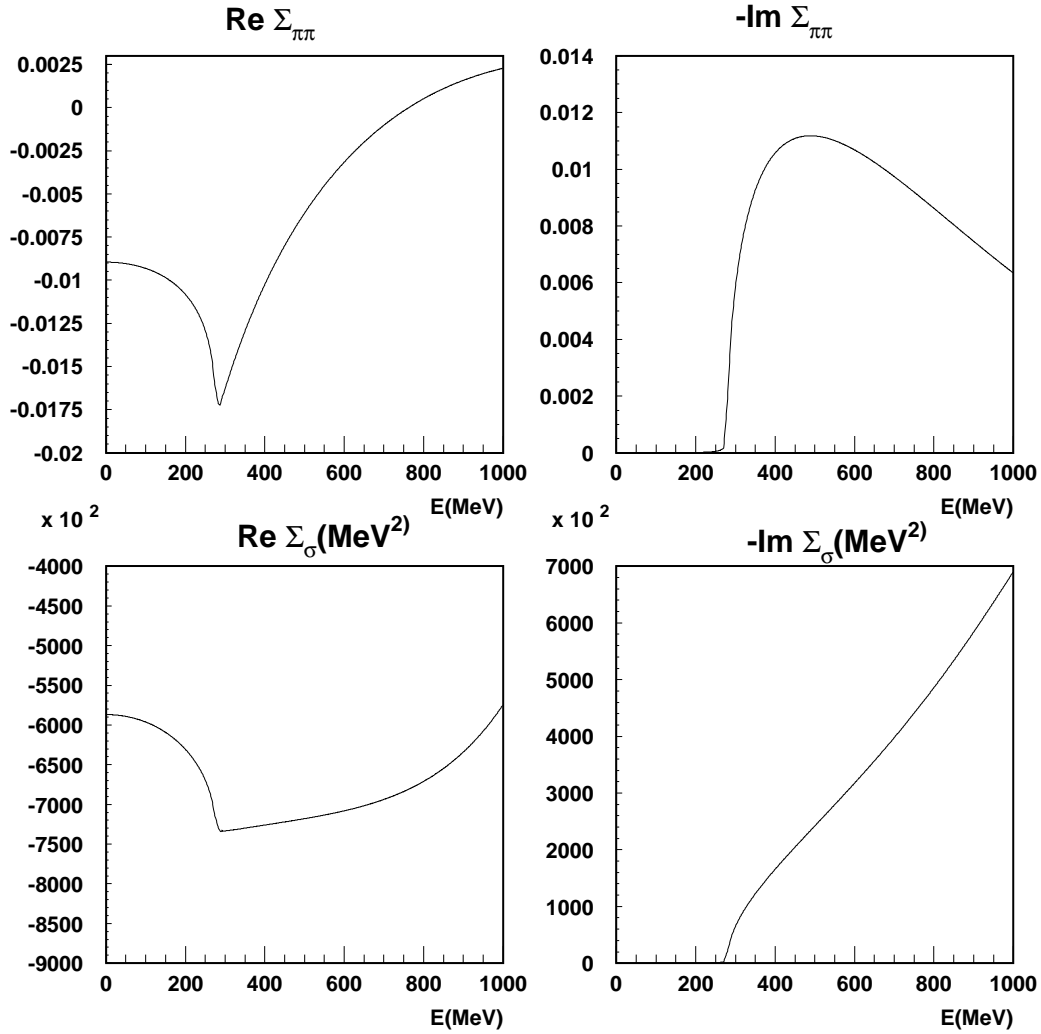


Abbildung 3.2: Im oberen Teil sieht man Real- und Imaginärteil der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$, im unteren Teil des Bildes die Selbstenergie des σ -Mesons Σ_{σ} .

das Energieintervall, in dem die Spektralfunktion auf die Hälfte ihres maximalen Wertes abgefallen ist. Benutzt man diese Definition erhält man als Wert für die Breite des σ -Mesons 380 MeV. Die beiden Methoden ergeben recht unterschiedliche Werte, woran man erkennen kann, daß die Bestimmung einer Breite für ein derart instabiles Teilchen wie das σ -Meson schwierig durchzuführen ist.

Diese Werte sind jedoch in guter Übereinstimmung mit den Werten die andere Autoren für Masse und Breite des σ -Mesons angeben [15],[26]. Die $T_{\pi\pi}$ -Matrix ist in der unteren

Hälfte der Abb. 3.3 gezeigt. Der Realteil der Streumatrix wechselt unterhalb der Produktionsschwelle für zwei Pionen bei etwa 150 MeV sein Vorzeichen von attraktiv zu repulsiv. Dies ist eine wichtige Eigenschaft um Kondensation zu verhindern und im Rahmen unseres Modells direkte Folge der zugrundeliegenden chiralen Symmetrie, die genau dieses fordert, wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde. An der Schwelle erhalten wir für die T-Matrix $T_{\pi\pi} \approx 9.3m_\pi/f_\pi$ in guter Übereinstimmung mit dem reinen s -Kanal Anteil der Streuamplitude von Weinberg Gl.(2.44). Die repulsiven Beiträge aus dem t - und u - Kanal werden im Rahmen unserer Näherung nicht berücksichtigt, da sie Terme nächsthöherer Ordnung in der $1/N$ -Entwicklung sind. Weiterführende Rechnungen haben gezeigt, daß unter Einbeziehung dieser sich der Wert der T-Matrix dem von Weinberg geforderten Wert weiter annähern würde.

Der Imaginärteil erhält durch den σ -Propagator erst Beiträge oberhalb der Schwelle. Im Vakuum ist das Pion im Rahmen unseres Modells rein reell und liefert daher keinen Beitrag zum Imaginärteil.

Mit den Werten für Real- und Imaginärteil der Streumatrix an der Schwelle kann man die Streulänge bestimmen. Diese ist gegeben als

$$a_0^0 = -\frac{T_{\pi\pi}^{00}}{32\pi m_\pi} \approx 0.20m_\pi^{-1}. \quad (3.17)$$

Dies ist in sehr guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert von $a_0^0 \approx 0.216 \pm 0.017m_\pi^{-1}$ [29]. Diese gute Übereinstimmung wird durch den Formfaktor erzielt, den wir zur besseren Beschreibung der Streudaten eingeführt haben. Dieser Wert ist konsistent mit theoretischen Rechnungen im Rahmen der chiralen Störungstheorie, die in der Ein-Schleifen-Näherung einen Wert von $a_0^0 \approx 0.201 \pm 0.01m_\pi^{-1}$ [30] voraussagen und in Zwei-Schleifen-Näherung $a_0^0 \approx 0.217m_\pi^{-1}$ [31].

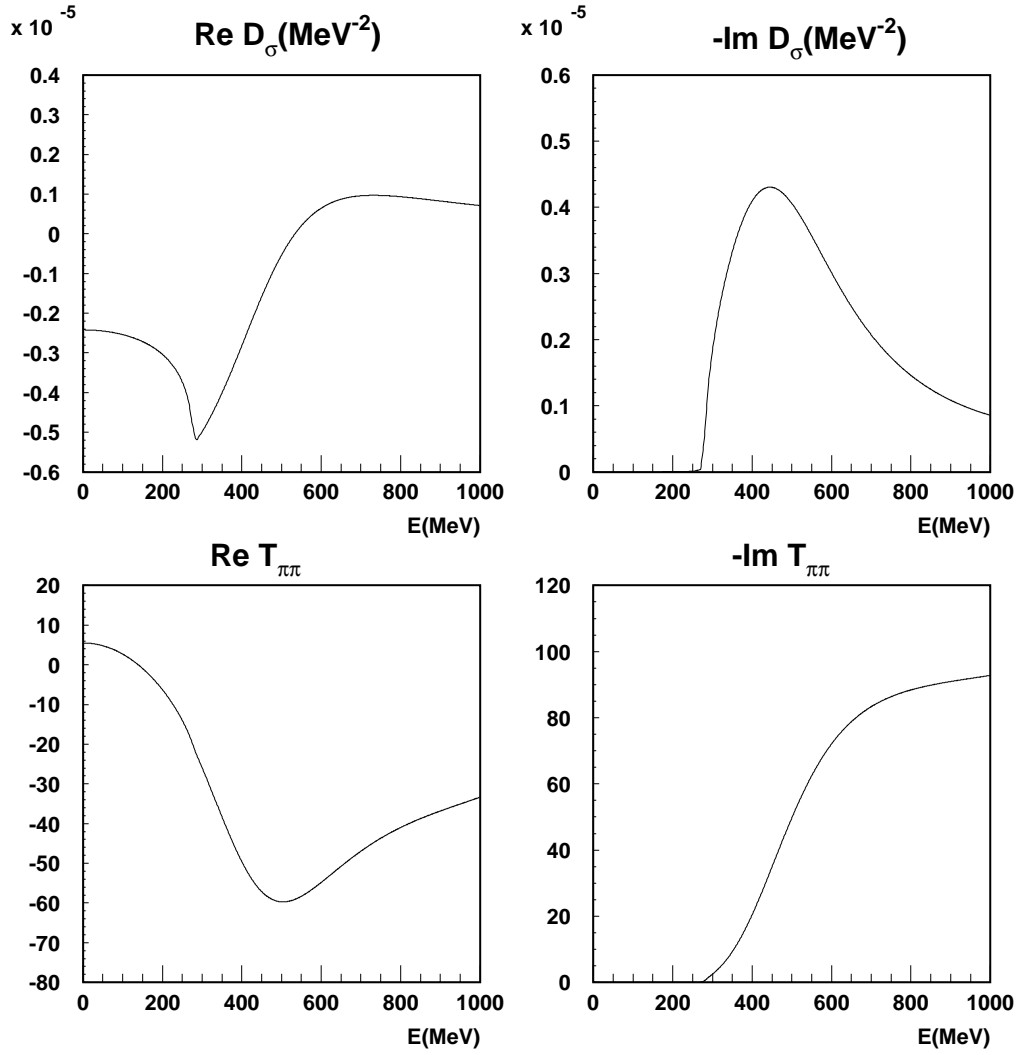


Abbildung 3.3: Real- und Imaginärteil des σ -Propagators und der $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix. Aufgrund der starken Kopplung des σ -Mesons an zwei Pionen ist das σ -Meson im Vakuum ein sehr breites Teilchen mit einer Masse von etwa 550 MeV (obere Bildhälfte). Die Streumatrix erfüllt die Voraussagen der chiralen Symmetrie. An der Schwelle ist diese attraktiv in Übereinstimmung mit Rechnungen im Rahmen der chiralen Störungstheorie. Für $E \rightarrow 0$ sieht man, daß der Realteil von $T_{\pi\pi}$ größer null ist, also repulsiv wirkt.

Kapitel 4

Effekte bei endlicher Temperatur

4.1 Thermodynamische Grundlagen

In diesem Abschnitt möchten wir das in den vorherigen Kapiteln beschriebene Modell auf endliche Temperatur erweitern. Dabei geht es uns vor allem um die chirale Symmetrie und ihre Wiederherstellung. Für eine Temperatur 170 MeV wird im Rahmen der Gitter-QCD [32], sowie anderer effektiver Modelle [33] [34], ein Phasenübergang von der spontan gebrochenen Phase in die chiral symmetrische Phase vorhergesagt. Diesen Phasenübergang und seine Auswirkungen auf das σ -Meson möchten wir im folgenden untersuchen. In relativistischen Feldtheorien ist die Teilchenzahl nicht erhalten, und daher bietet es sich bei einer thermodynamischen Beschreibung an, statt des kanonischen das großkanonische Ensemble zu wählen.

Das thermodynamische Potential des großkanonischen Ensembles ist gegeben durch

$$\Omega = \langle H \rangle - TS - \mu \langle N \rangle . \quad (4.1)$$

Hierbei ist N der Teilchenzahloperator, μ das chemische Potential, S die Entropie und T die Temperatur des Ensembles. Da wir uns auf die Betrachtung von bosonischen Freiheitsgraden beschränken, für die die Teilchenanzahl keine Erhaltungsgröße ist, verschwindet das chemische Potential μ und damit der Term proportional zum Teilchenzahloperator. Die zugehörige Zustandssumme Z , aus der sich dann alle thermodynamischen Größen berechnen lassen, ist dann gegeben durch

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) \quad \beta = \frac{1}{k_B T} . \quad (4.2)$$

Zur Bestimmung von Erwartungswerten benötigt man den Dichteoperator

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta H} . \quad (4.3)$$

Mittels diesem lassen sich dann die Erwartungswerte berechnen als

$$\langle O \rangle = \text{Tr}[\rho O] . \quad (4.4)$$

Für den einfachen Fall, daß der Hamiltonoperator diagonal in bilinearen Ausdrücken der Feldoperatoren ist, kann der Dichteoperator geschrieben werden als

$$\rho = \prod_i [f_i n_i + (1 - f_i)(1 - n_i)] . \quad (4.5)$$

Dabei sind n_i die Teilchenzahloperatoren für die verschiedenen Teilchensorten und f_i die bosonischen Verteilungsfunktionen

$$f_i = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_i} - 1} . \quad (4.6)$$

Eine wichtige Verallgemeinerung zum Fall $T = 0$ besteht darin, daß Erwartungswerte von Operatoren nicht mehr bezüglich des Grundzustandes bestimmt werden, sondern Ensemble-Mittelwerte der Operatoren mittels Gl.(4.4). Anstelle der Minimierung der Grundzustandsenergie tritt nun die Minimierung des thermodynamischen Potentials Ω .

4.2 HFB-Formalismus bei endlicher Temperatur

Analog zum Fall $T = 0$ werden Quasiteilchen mittels einer speziellen Bogoliubovtransformation eingeführt. Die dabei auftretenden Bogoliubovfaktoren erhalten eine Temperaturabhängigkeit, erfüllen aber weiterhin die üblichen Kommutatorrelation (siehe Gl.(2.15)) [21].

Schreibt man den Hamiltonoperator in der neu eingeführten Quasiteilchenbasis, erhält man formal die gleiche Form wie in Gl.(2.18).

Im Fall $T = 0$ wurde durch Anwendung des Wick-Theorems der Hamiltonoperator in Normalordnung überführt und sein Erwartungswert bezüglich des Quasiteilchenvakuum bestimmt. Aus der Minimierung des Erwartungswertes konnten dann Forderungen an die Bogoliubov-Faktoren gestellt werden, die eine Bestimmung der Faktoren erlaubten.

Dies ist im Fall endlicher Temperatur nicht mehr möglich, da die Quasiteilchenanregungen ein statistisches Ensemble bilden und der Erwartungswert mit dem Quasiteilchengrundzustand in Normalordnung nicht mehr verschwindet. Nach dem Theorem von Bloch und de Dominicis [35] kann man allerdings weiterhin das Wick-Theorem auf die Ensemble-Mittelwerte der Operatoren anwenden, so daß man für den großkanonischen Erwartungswert des Hamiltonoperators die gleiche Form wie im Vakuum erhält:

$$\begin{aligned} H = & H_0(v, y, \langle \sigma \rangle) + \eta[\beta_0 + \beta_0^\dagger] + \sum_q \varepsilon_\pi(q) \vec{\alpha}_q^\dagger \vec{\alpha}_q + \sum_q \varepsilon_\sigma(q) \beta_q^\dagger \beta_q \\ & + \sum_q c_\pi(q) [\vec{\alpha}_q^\dagger \vec{\alpha}_{-q}^\dagger + \vec{\alpha}_q \vec{\alpha}_{-q}] + \sum_q c_\sigma(q) [\beta_q^\dagger \beta_{-q}^\dagger + \beta_q \beta_{-q}] \\ & + \int d^3x : \left[\frac{\lambda_0^2}{N} \langle \sigma \rangle (\pi^2(x) + \sigma^2(x)) \sigma(x) + \frac{\lambda_0^2}{4N} (\pi^2(x) + \sigma^2(x))^2 \right] : . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aus der Minimierung des thermodynamischen Potentials Ω bezüglich der Faktoren u_q, x_q und $\langle\sigma\rangle$, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{x_0 + y_0}{\sqrt{\mu}} \left[\lambda_0^2 \langle\sigma\rangle I_\pi + \frac{3}{N} \lambda_0^2 \langle\sigma\rangle I_\sigma + \frac{1}{N} \lambda_0^2 \langle\sigma\rangle^3 + \mu_0^2 \langle\sigma\rangle - c\sqrt{N} \right] = 0, \\ c_\pi(q) &= \omega_q u_q v_q + \frac{\lambda_0^2 (u_q + v_q)^2}{2 \cdot 2\omega_q} \left[\frac{N+2}{N} I_\pi + I_\sigma + \langle\sigma\rangle^2 \right] = 0, \\ c_\sigma(q) &= \omega_q x_q y_q + \frac{\lambda_0^2 (x_q + y_q)^2}{2 \cdot 2\omega_q} \left[I_\pi + \frac{3}{N} I_\sigma + \langle\sigma\rangle^2 \right] = 0.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Dabei sind I_π und I_σ nun temperaturabhängige Tadpole-Integrale.

Zur Berechnung dieser Integrale benutzen wir den Matsubara-Formalismus (die Methode der imaginären Zeit) [36],[37].

4.2.1 Der Matsubara-Formalismus

Bei endlicher Temperatur ist zu berücksichtigen, daß aufgrund der Definition des zeitgeordneten Produktes und der Kubo-Martin-Schwinger Beziehung (Anti-)Periodizitätsbedingungen für (fermionische) bosonische Größen gelten. Dies bedeutet, daß die auftretenden Zeitintervalle beschränkt sind und nach Ausführung einer Fouriertransformation in den Impulsraum diskrete Energien auftreten - die sogenannten Matsubarafrequenzen.

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} & \text{Bosonen} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{Fermionen} \end{cases}\tag{4.9}$$

Die Integration über die Energiekomponente des Impulses wird daher ersetzt durch eine Summation über die Matsubarafrequenzen

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}.\tag{4.10}$$

Dabei wird zusätzlich eine Wickrotation durchgeführt, wobei folgende Substitution vorgenommen wird

$$k_0 \rightarrow i\omega_n.\tag{4.11}$$

Angewandt auf die Tadpole-Integrale erhält man

$$I_{\pi/\sigma} = \int \sum_n \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{-1}{\beta} \frac{1}{(i\omega_n)^2 - \vec{k}^2 - m_{\pi/\sigma}^2}.\tag{4.12}$$

Es gibt mehrere Arten diese Matsubara-Summe auszurechnen. In unserem speziellen Fall kann diese direkt ausgeführt werden. Alternativ kann die Summe mittels des Residuensatzes in ein Wegintegral umgewandelt werden und dieses dann berechnet werden.

Nach Ausführung der Summe erhält man

$$I_\pi = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2f_\pi(q)}{2\varepsilon_\pi(q)}, \quad I_\sigma = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2f_\sigma(q)}{2\varepsilon_\sigma(q)}.\tag{4.13}$$

Hierbei sind $f_\sigma(q)$ und $f_\pi(q)$ die bereits eingeführten bosonischen Besetzungszahlen. Man erkennt leicht, daß die Tadpole Integrale im Limes $T \rightarrow 0$ den Vakuumanteil reproduzieren. Bei endlicher Temperatur hingegen muß man darauf achten, daß die Teilchenenergien die temperaturabhängigen Massen enthalten

$$\varepsilon_{\pi/\sigma}^T(q) = \sqrt{m_{\pi/\sigma}^2(T) + \vec{p}^2}. \quad (4.14)$$

und daher eine Separation des Vakuumanteils nicht so einfach erfolgen kann. Die Tadpole werden wie im Vakuum mittels der Pauli-Villars Methode regularisiert und man erhält bei endlicher Temperatur (siehe Anhang B):

$$I_\pi^T = \frac{1}{16\pi^2} \left[(m_\pi^2(T) + 2\Lambda^2) \ln \frac{m_\pi^2(T) + 2\Lambda^2}{m_\pi^2(T)} - 2(m_\pi^2(T) + \Lambda^2) \ln \frac{m_\pi^2(T) + \Lambda^2}{m_\pi^2(T)} \right] \quad (4.15)$$

$$+ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2f_\pi(\vec{p})}{\omega_p}. \quad (4.16)$$

Die Bestimmung der Quasiteilchenenergien erfolgt ebenso wie im Fall $T = 0$. Aus den Bedingungen, die man aus der Minimierung des Thermodynamischen Potentials erhält, ergeben sich wiederum 3 BCS-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pi^2(0) &= \frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} + \frac{2}{N}\lambda_0^2(I_\pi - I_\sigma), \\ \varepsilon_\sigma^2(0) &= \frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} + \frac{2}{N}\lambda_0^2\langle\sigma\rangle^2, \\ \frac{c\sqrt{N}}{\langle\sigma\rangle} &= \left[\mu_0^2 + \lambda_0^2(I_\pi + \frac{3}{N}I_\sigma + \frac{1}{N}\langle\sigma\rangle^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Auch bei endlicher Temperatur verletzt die HFB-Methode die Symmetrie, und das Quasipion erhält auch im chiralen Limes eine Masse. Diese Symmetrieverletzung wird durch die Erweiterung auf die RPA wieder beseitigt.

4.3 RPA bei endlicher Temperatur

Das Vorgehen ist zunächst analog zum Fall $T = 0$. Es wird der Anregungsoperator für die Ein- und Zweiteilchenzustände eingeführt, der von derselben Form ist wie der Symmetrieoperator

$$\begin{aligned} Q_\nu^\dagger &= X_\nu^1 \alpha_0^{a\dagger} - Y_\nu^1 \alpha_0^a \\ &+ \sum_q \left[X_\nu^2(q) \beta_q^\dagger \alpha_{-q}^{a\dagger} - Y_\nu^2(q) \beta_{-q} \alpha_q^a + X_\nu^3(q) \beta_q \alpha_q^{a\dagger} - Y_\nu^3(q) \beta_{-q}^\dagger \alpha_{-q}^a \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aufgrund der Diagonalität des Hamiltonoperators tragen im Vakuum die Terme proportional $\beta_q \alpha_q^{a\dagger}$ und $\beta_{-q}^\dagger \alpha_{-q}^a$ nicht zum Vakuumerwartungswert bei. Bei endlicher Temperatur hingegen werden großkanonische Erwartungswerte bestimmt, so daß diese Anregungsoperatoren einen Beitrag liefern.

Anwendung der RPA Bewegungsgleichungen liefert sechs RPA-Gleichungen:

$$\langle [\alpha_0^a, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_0^a, Q_\nu^\dagger] \rangle, \quad (4.19)$$

$$\langle [\alpha_0^{a\dagger}, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_0^{a\dagger}, Q_\nu^\dagger] \rangle, \quad (4.20)$$

$$\langle [\alpha_{-q}^a \beta_q, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_{-q}^a \beta_q, Q_\nu^\dagger] \rangle, \quad (4.21)$$

$$\langle [\alpha_q^{a\dagger} \beta_{-q}^\dagger, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_q^{a\dagger} \beta_{-q}^\dagger, Q_\nu^\dagger] \rangle, \quad (4.22)$$

$$\langle [\alpha_q^a \beta_q^\dagger, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_q^a \beta_q^\dagger, Q_\nu^\dagger] \rangle, \quad (4.23)$$

$$\langle [\alpha_{-q}^{a\dagger} \beta_{-q}, [H, Q_\nu^\dagger]] \rangle = \Omega_\nu \langle [\alpha_{-q}^{a\dagger} \beta_{-q}, Q_\nu^\dagger] \rangle. \quad (4.24)$$

Unter Benutzung der Vertauschungsrelationen und der expliziten Form für den Hamilton- und den RPA-Operator lassen sich die Bewegungsgleichungen als Eigenwertproblem schreiben und lösen [13]. Für die Massen von Pion und σ -Meson ergibt sich unter Ausnutzung der BCS Gap-Gleichung in Gl.(4.17) in führender Ordnung der $1/N$ Entwicklung:

$$m_\pi^2 = \frac{c}{s} + \frac{2\lambda_0^2 [\varepsilon_\pi^2 - \varepsilon_\sigma^2] [\Sigma_{\pi\sigma}(0) - \Sigma_{\pi\sigma}(m_\pi^2)]}{N \left(1 - \frac{2\lambda_0^2}{N} \Sigma_{\pi\sigma}(m_\pi^2) \right)} \quad (4.25)$$

$$m_\sigma^2 = \varepsilon_\sigma^2 + 2\lambda_0^4 \langle \sigma \rangle^2 \frac{\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2) + \frac{9}{N} \Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2) - 6\lambda_0^2 \frac{N+3}{N^2} \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2) \Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2)}{\left[1 - \frac{N+2}{N} \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2) \right] \left[1 - \frac{3}{N} \lambda_0^2 \Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2) \right] - \frac{1}{N} \lambda_0^4 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2) \Sigma_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2)}. \quad (4.26)$$

Die auftretenden Schleifen sind definiert wie in Gl.(2.37). Die Integration über die q_0 Komponente weicht, wie im vorangehenden Abschnitt besprochen, einer Summation über die Matsubarafrequenzen, und man erhält:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\pi\sigma}(\Omega_\nu^2, \vec{p}) = & \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{\varepsilon_\pi(\vec{q}) + \varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q})}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})\varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q})} \frac{1 + f_\pi(\vec{q}) + f_\sigma(\vec{p} - \vec{q})}{\Omega_\nu^2 - (\varepsilon_\pi(\vec{q}) + \varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q}))^2} \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_\pi(\vec{q}) - \varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q})}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})\varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q})} \frac{f_\sigma(\vec{p} - \vec{q}) - f_\pi(\vec{q})}{\Omega_\nu^2 - (\varepsilon_\pi(\vec{q}) - \varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q}))^2} \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\pi\pi}(\Omega_\nu^2, \vec{p}) = & \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{\varepsilon_\pi(\vec{q}) + \varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q})}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})\varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q})} \frac{1 + f_\pi(\vec{q}) + f_\pi(\vec{p} - \vec{q})}{\Omega_\nu^2 - (\varepsilon_\pi(\vec{q}) + \varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q}))^2} \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_\pi(\vec{q}) - \varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q})}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})\varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q})} \frac{f_\pi(\vec{q}) - f_\pi(\vec{p} - \vec{q})}{\Omega_\nu^2 - (\varepsilon_\pi(\vec{q}) - \varepsilon_\pi(\vec{p} - \vec{q}))^2} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\sigma\sigma}(\Omega_\nu^2, \vec{p}) = & \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{\varepsilon_\sigma(\vec{q}) + \varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q})}{2\varepsilon_\sigma(\vec{q})\varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q})} \frac{1 + f_\sigma(\vec{q}) + f_\sigma(\vec{p} - \vec{q})}{\Omega_\nu^2 - (\varepsilon_\sigma(\vec{q}) + \varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q}))^2} \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_\sigma(\vec{q}) - \varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q})}{2\varepsilon_\sigma(\vec{q})\varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q})} \frac{f_\sigma(\vec{q}) - f_\sigma(\vec{p} - \vec{q})}{\Omega_\nu^2 - (\varepsilon_\sigma(\vec{q}) - \varepsilon_\sigma(\vec{p} - \vec{q}))^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Bildet man wieder den Grenzfall $N \rightarrow \infty$, erhält man folgende Gapgleichungen für das Kondensat, Pion und σ -Meson:

$$\begin{aligned}\frac{c}{\langle\sigma\rangle} &= \mu_0^2 + \lambda_0^2[I_\pi + \langle\sigma\rangle^2] \\ m_\pi^2 &= \frac{c}{\langle\sigma\rangle} = \mu_0^2 + \lambda_0^2[I_\pi + \langle\sigma\rangle^2] \\ m_\sigma^2 &= \frac{c}{\langle\sigma\rangle} + 2\lambda_0^2\langle\sigma\rangle^2 + 2\lambda_0^4\langle\sigma\rangle^2 \frac{\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}{1 - \lambda_0^2\Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)}.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Formal sind die Gleichungen von gleicher Form wie im Fall $T = 0$. Insbesondere erhält man im Limes $T \rightarrow 0$ die Vakuumlösung.

Die Pionen sind im chiralen Limes wieder die Goldstone Bosonen der Theorie, da für $c = 0$ die Masse der Pionen verschwindet.

Allerdings haben die Massen und das Kondensat durch das Auftreten der Besetzungszahlen im Tadpole und der Zweipionselbstenergie eine Temperaturabhängigkeit erhalten.

4.4 Massenverlauf bei endlicher Temperatur

Nachdem im vorigen Abschnitt die BCS-Gleichungen bei endlicher Temperatur für die π - und σ -Mesonen hergeleitet wurden, wollen wir diese nun lösen. Unser besonderes Interesse gilt dabei der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei endlicher Temperatur.

Das Kondensat erhält man im Rahmen unseres Modells als Lösung eines gekoppelten Systems nichtlinearer Gleichungen. Insbesondere kann dabei der Fall eintreten, daß bei einer kritischen Temperatur T_c der Wert des Kondensates verschwindet. Ein verschwindender Vakuumerwartungswert $\langle\sigma\rangle$ würde nach Gl.(4.30) eine Entartung der Masse von Pion und σ -Meson bedeuten und die im Vakuum spontan gebrochene chirale Symmetrie wäre wiederhergestellt. Dies würde den Phasenübergang von der Nambu-Goldstone- in die Wigner-Weyl-Phase des Modells kennzeichnen.

Löst man dieses gekoppelte Gleichungssystem für die Massen, erhält man den in der linken Hälfte von Abb. (4.1) gezeigten Verlauf: Die Masse des Pions ist über einen großen Temperaturbereich bis etwa 200 MeV nahezu konstant. Dies ist direkte Folge der zugrundeliegenden chiralen Symmetrie. Die Pionen als „Quasi-Goldstonebosonen“ sind durch das Goldstone Theorem vor zu starken Änderungen in der Masse geschützt. Für noch höhere Temperaturen sieht man dann einen deutlichen Anstieg der Pionmasse.

Neben dem Pion ist auch der Verlauf der σ -Masse und der Quasiteilchenmasse ε_σ gezeigt. Letztere fällt mit zunehmender Temperatur ab und erreicht bei einer Temperatur von etwa 300 MeV ein Minimum. Ab dieser Temperatur sieht man dann wieder einen Anstieg der parallel zu dem des Pions erfolgt. Dieser Verlauf ist durch die in Gl.(3.2) gegebene Identität bestimmt. Für geringe Temperaturen folgt ε_σ dem Verlauf des abnehmenden Kondensates, da die Pionmasse nahezu konstant ist, während mit ansteigender Temperatur der Wert des Kondensates auf einen Bruchteil seines Vakuumwertes absinkt, und die

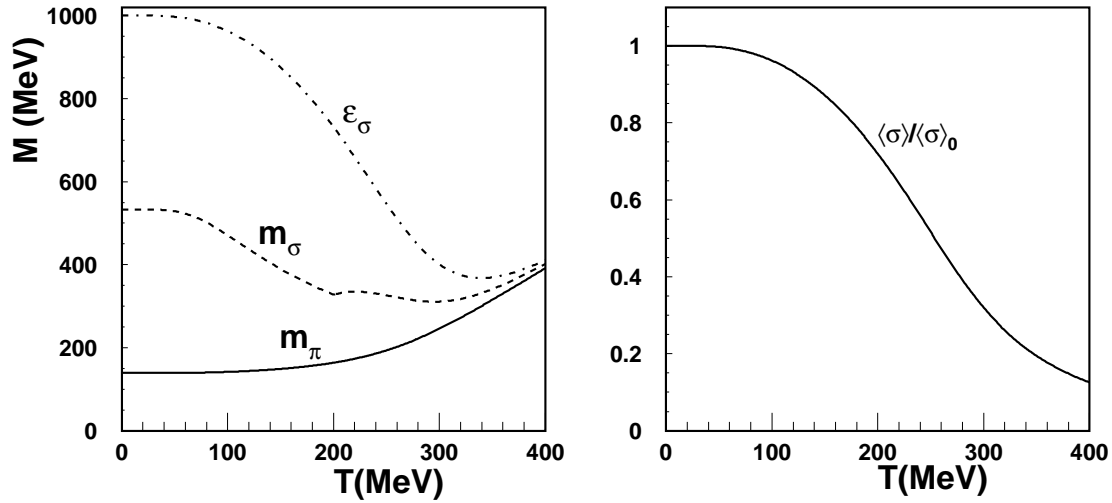


Abbildung 4.1: Die Massen von Pion und σ -Meson als Funktion der Temperatur. Auf der rechten Seite ist der Verlauf des Kondensates zu sehen.

Pionmasse anwächst. Bei sehr hoher Temperatur schließlich verschwindet das Kondensat nahezu, und ε_σ entartet mit der Pionmasse. Die Temperaturabhängigkeit des Kondensates $\langle\sigma\rangle$ ist im rechten Teil der Abb. 4.1 zu sehen und zeigt das Schmelzen des Kondensates. Die Masse des σ -Mesons fällt zunächst ab und folgt dem Verlauf des Kondensates. Bei einer Temperatur von etwa 200 MeV sieht man dann eine Änderung dieses Verhaltens. Die Masse des σ -Meson ist nahezu konstant ab dieser Temperatur. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Masse bei dieser Temperatur unter die Schwelle für die Produktion von zwei Pionen fällt. Das σ -Meson in Ruhe kann nicht mehr in zwei Pionen zerfallen und der Imaginärteil der Selbstenergie verschwindet. Für höhere Temperaturen sieht man dann die Massen von π und σ -Meson sich mehr und mehr annähern als Folge des nahezu verschwindenden Kondensates, wie bereits oben besprochen. Eine vollständige Wiederherstellung der chiralen Symmetrie findet allerdings nicht statt, da das Kondensat aufgrund der expliziten Brechung der Symmetrie auch bei Temperaturen von 500 MeV einen kleinen, aber von null verschiedenen, Wert besitzt.

Betrachten wir nun den Verlauf der Massen im chiralen Limes: Das Pion ist bei $T = 0$ masselos, wie es vom Goldstone Theorem gefordert wird. Das σ erhält durch den nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert eine endliche Masse aufgrund der spontanen Symmetriebrechung, wie in Kapitel 1 besprochen. Das Kondensat und die Massen von π und σ sind in Abb. 4.2 zu sehen. Das Kondensat zeigt einen stetigen Abfall mit steigender Temperatur und verschwindet bei einer kritischen Temperatur T_c von etwa 170 MeV. Bei dieser Temperatur findet ein Phasenübergang zweiter Ordnung von der spontan gebrochenen Nambu-Goldstone-Phase in die Wigner-Weyl-Phase statt, in Übereinstimmung mit anderen Untersuchungen des linearen σ -Modells [38]. Ab dieser Temperatur bleibt das Kondensat null. Die Massen von Pion und σ -Meson sind dann identisch und die RPA-Fluktuationen bringen keinen Beitrag mehr zur Masse des σ -Mesons, da diese nach

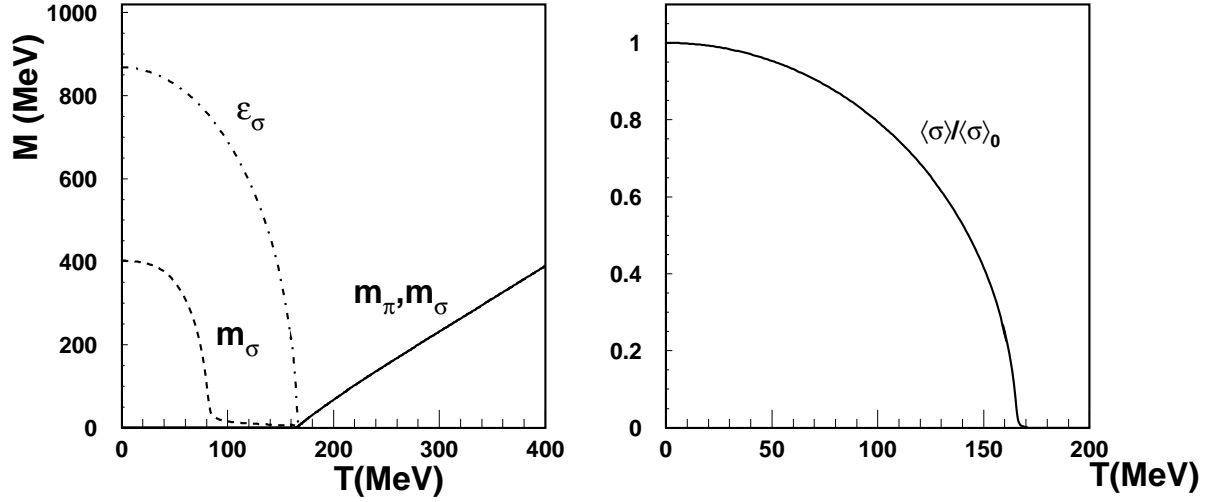


Abbildung 4.2: Die Massen von Pion und σ -Meson als Funktion der Temperatur im chiralen Limes, sowie der Verlauf des Kondensates. ε_σ ist dabei die Masse des nackten σ und m_σ die physikalische σ -Masse. Der Übergang von der Nambu-Goldstone-Phase in die Wigner-Weyl-Phase findet bei ca. 170 MeV statt.

Gl.(4.30) proportional zum Wert des Kondensates waren. Die Masse des σ ist dann also gleich seiner „nackten“ Masse.

Das Pion ist aufgrund des Goldstone Theorems bis zur kritischen Temperatur von 170 MeV masselos. Ab der kritischen Temperatur befindet man sich nicht mehr in der spontan gebrochenen Phase und die Masse des Pions ist nicht mehr durch das Goldstone Theorem fixiert. Das Pion kann ab der kritischen Temperatur von null verschiedene Massen annehmen und man sieht für Temperaturen jenseits der kritischen Temperatur einen linearen Anstieg. Die Masse des σ -Mesons entartet mit der Pionmasse oberhalb von T_c und folgt dem linearen Anstieg der Masse mit steigender Temperatur. Für Temperaturen unterhalb T_c kann man den Massenverlauf des σ -Mesons in zwei Bereiche unterteilen. Zunächst fällt die Masse quadratisch mit der Temperatur ab, dem Verhalten des Kondensates folgend. Bei $T = 80$ MeV ist diese dann aber bereits fast auf null gefallen. Ab dieser Temperatur zeigt die σ -Masse dann einen schwach abfallenden Verlauf. Der Grund für dieses Verhalten liegt in den RPA-Fluktuationen. Im chiralen Limes kann man nach Gl.(3.2) und Gl.(2.43) für die Masse des σ -Mesons folgende Identität ableiten:

$$m_\sigma^2(T) = \frac{\varepsilon_\sigma^2(T)}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)} \quad (4.31)$$

Bei $T = 0$ ist die Selbstenergie $\lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}(m_\sigma^2)$ ausgewertet an der physikalischen σ Masse noch vergleichbar mit der Eins im Nenner und bewirkt lediglich eine Reduzierung der nackten Masse auf 400 MeV. Mit steigender Temperatur jedoch fällt die Masse des σ -Mesons und der Wert der Fluktuation wird daher bei stetig kleiner werdenden Energien

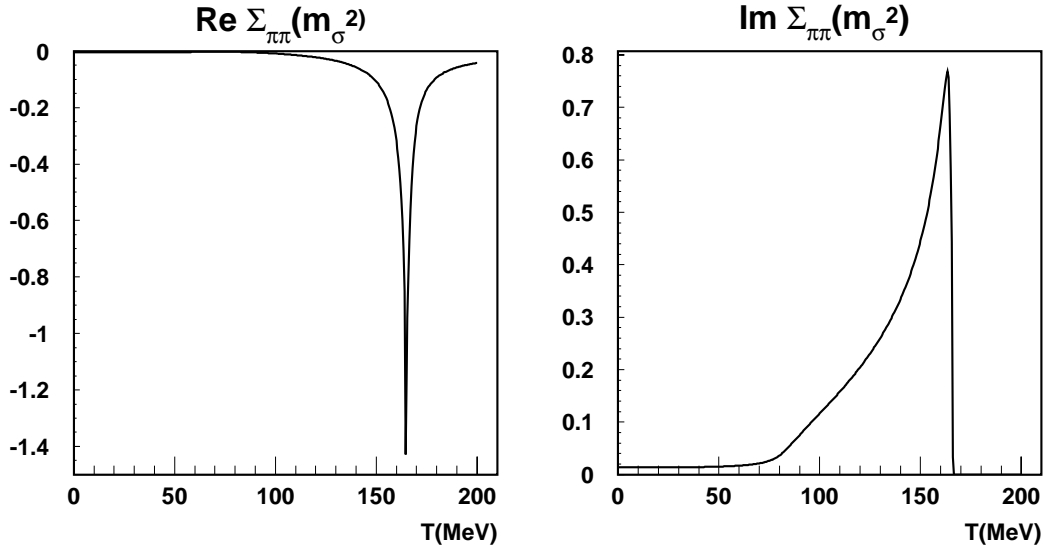


Abbildung 4.3: Temperaturverlauf von Real- und Imaginärteil der „Selbstenergie“ $\Sigma_{\pi\pi}$ an der physikalischen σ -Masse. Deutlich erkennt man den starken Anstieg im Imaginärteil bei $T=80$ MeV. Ebenso sieht man bei der kritischen Temperatur Real- und Imaginärteil divergieren. Jenseits von T_c schließlich sind die Massen von π und σ entartet, aber von null verschieden. Deswegen ist ein Zerfall des σ in zwei Pionen nicht mehr möglich, so daß der Imaginärteil verschwindet.

ausgewertet, wobei die Fluktuationen dabei immer größer werden. Das treibt die Masse immer schneller auf die Pionmasse zu. Bei 80 MeV sind die Fluktuationen dann bereits so groß, daß die Masse des σ nahezu mit der Pionmasse entartet. Mit steigender Temperatur werden die Fluktuation dann immer größer bis sie schließlich bei T_c divergieren. Dieses Verhalten kann man sehr gut in Abb. 4.3 erkennen, in der die Selbstenergie ausgewertet an der σ -Masse dargestellt ist.

Die Fluktuationen verstärken den Effekt durch den fallenden Wert des Kondensates und würden die kritische Temperatur zu einem niedrigeren Wert hin verschieben. Das Kondensat jedoch hängt in führender Ordnung der $1/N$ -Entwicklung nicht von den Fluktuationen ab, und deswegen bleibt der Effekt auf die Masse des σ -Mesons beschränkt. Die nahezu vollständige Entartung der Massen von Pion und σ -Meson findet daher schon bei einer deutlich niedrigeren Temperatur statt als die Restaurierung der Symmetrie, die durch das Verschwinden des Vakuumerwartungswertes gekennzeichnet ist. Rechnungen haben gezeigt, daß dieser Effekt nicht auf die von uns verwendete Renormierungsmethode beschränkt ist. Bei Benutzung eines Abschneideparameters etwa tritt das gleiche Verhalten bei einer etwas höheren Temperatur von 100 MeV auf.

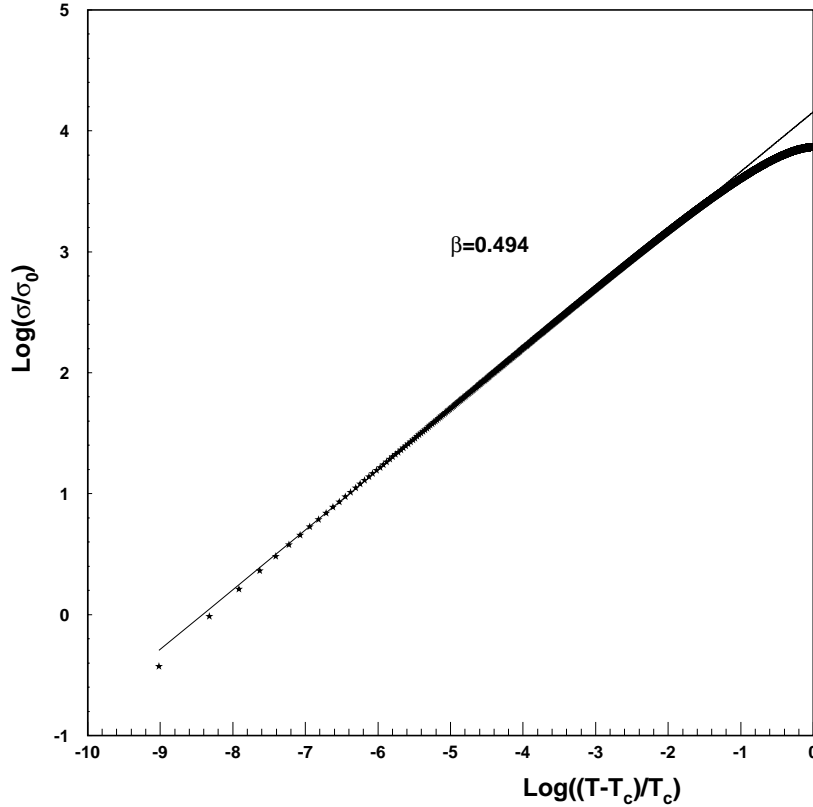


Abbildung 4.4: Das Kondensat als Funktion der reduzierten Temperatur $(T - T_c)/T_c$ in doppellogarithmischer Darstellung. Deutlich kann man die Proportionalität zu der Geraden mit der Steigung β erkennen.

4.4.1 Der kritische Exponent β

Im chiralen Limes erkennt man einen Phasenübergang zweiter Ordnung bei einer kritischen Temperatur von etwa 165 MeV. In der Nähe dieses Phasenübergangs zeigt sich ein universelles Verhalten, welches mit sogenannten kritischen Exponenten beschrieben werden kann. Diese beschreiben das Skalenverhalten des Modells und sind nur abhängig von der Dimension und der zugrunde liegenden Symmetrie [39].

Der kritische Exponent β beschreibt dabei die Änderung des Ordnungsparameters in der Nähe der kritischen Temperatur. Mithilfe des kritischen Exponenten β kann der Wert des Kondensates $\langle\sigma\rangle$ folgendermaßen parametrisiert werden [40]:

$$\langle\sigma\rangle(T) \sim \langle\sigma\rangle(0)((T - T_c)/T_c)^\beta. \quad (4.32)$$

In Abb. 4.4 sieht man einen Fit des Parameters an den Verlauf des Kondensates und man findet für den kritischen Exponenten den Wert $\beta = 0.494$. Dieser Wert ist in sehr guter Übereinstimmung mit dem aus „Mean-Field“ Rechnungen bekannten Wert von 0.5 [39]. Rechnungen im Rahmen der Renormierungsgruppe [41] oder Gitterrechnungen [42] zeigen einen etwas niedrigeren Wert für $\beta \approx 0.4$. Der Unterschied liegt dabei in der Berücksich-

tigung von Fluktuationen. Im Rahmen unserer Näherung wird das Kondensat durch die „Mean-Field“-Näherung beschrieben, da die Fluktuationen erst in nächster Ordnung der $1/N$ -Entwicklung eingehen. In unserem Modell erhält lediglich das σ -Meson Beiträge aus Fluktuationen durch die RPA, was den ermittelten Wert von β erklärt. Die Abweichungen in Abb. 4.4 für Temperaturen nahe der kritischen Temperatur rühren von der Unsicherheit bei der Bestimmung der kritischen Temperatur. In der Tat sieht man bei leichten Modifikationen des Wertes für die kritische Temperatur eine Anpassung der Daten an die durch den kritischen Evorgebene vorgegebene Gerade.

Von diesen Abweichungen abgesehen folgt das Kondensat über 6 Größenordnungen in der reduzierten Temperatur der durch β vorgegebenen Gerade, bevor es dann für Temperaturen weit weg vom Phasenübergang zu deutlichen Abweichungen kommt. Für diese Temperaturen sollte der Wert des Kondensates der im Rahmen der chiralen Störungstheorie χ pT berechneten Entwicklung folgen [43]:

$$\begin{aligned}\sigma/\sigma_0 &= 1 - \frac{T^2}{8f_\pi^2} - \frac{T^4}{384f_\pi^4} - \frac{T^6}{288f_\pi^6} \ln \frac{\lambda_q}{T} \\ \lambda_q &= 470 \pm 110 \text{ MeV}\end{aligned}\tag{4.33}$$

In Abb. 4.5 sieht man diesen Vergleich des Kondensates mit chiraler Störungstheorie und dem Skalenverhalten in der Nähe des Phasenübergangs. Für niedrige Temperaturen folgt das Kondensat der Vorhersage der χ pT, bis bei einer Temperatur von etwa 30 MeV die beiden Kurven voneinander abzuweichen beginnen. Nähert sich die Temperatur der kritischen Temperatur stimmt der Verlauf des Kondensates mit der durch den kritischen Exponenten vorgegebenen Skalenrelation in Gl.(4.32) überein.

4.5 σ -Propagator bei endlicher Temperatur

Nachdem im vorigen Kapitel die Masse des σ -Mesons bereits untersucht wurde, wollen wir in diesem Kapitel den vollen Propagator und die $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix betrachten. Der Propagator lässt sich nach Gl.(4.30) schreiben als

$$D_\sigma^T(E, \vec{p}) = \left[E^2 - \vec{p}^2 - \varepsilon_\sigma^2(T) - \frac{2\lambda_0^4 \langle \sigma \rangle_T^2 \Sigma_{\pi\pi}^T(E, \vec{p})}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}^T(E, \vec{p})} \right]^{-1}.\tag{4.34}$$

Die in Gl.(4.28) angegebene Selbstenergie vereinfacht sich im Spezialfall $\vec{p} = \vec{0}$ folgendermaßen:

$$\Sigma_{\pi\pi}(E) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{v(q)^2}{2\varepsilon_\pi(\vec{q})} \frac{1 + 2f_\pi(\vec{q})}{E^2 - 4\varepsilon_\pi(\vec{q})^2}.\tag{4.35}$$

Die Regularisierung dieses divergenten Integrals erfolgt durch den bereits in Gl. (3.9) eingeführten Formfaktor.

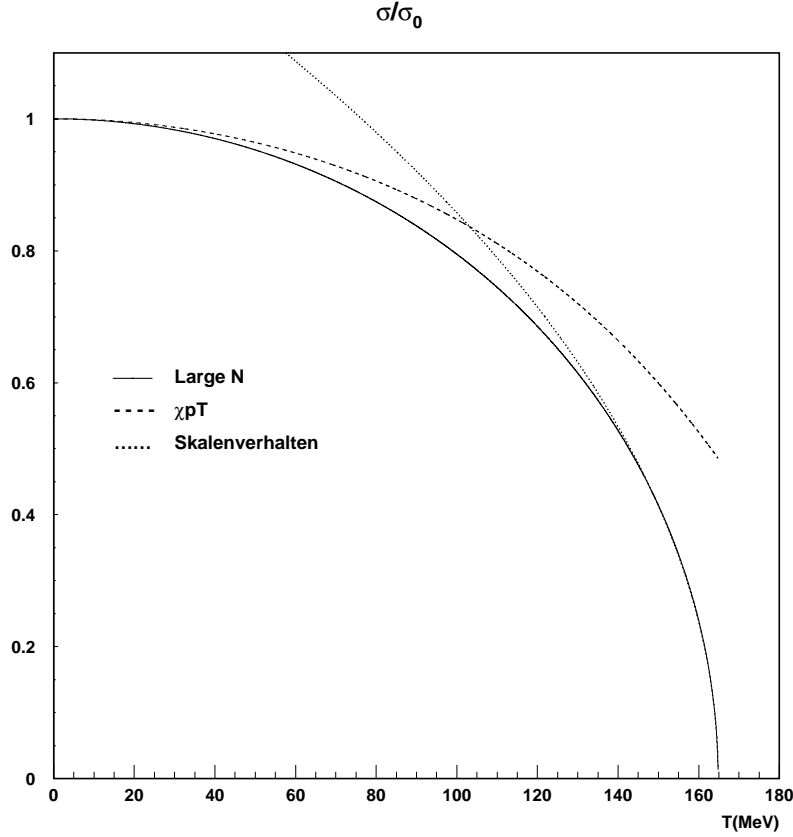


Abbildung 4.5: Das Kondensat als Funktion der Temperatur in drei Modellen. Die durchgezogene Kurve ist dabei das Resultat unserer Rechnung. Die gestrichelte Kurve ist die Vorhersage der chiralen Störungstheorie zur Ordnung $\mathcal{O}(T^8)$. Die gepunktete Kurve zeigt das „Widom scaling“: In der Nähe des Phasenübergangs skaliert der Ordnungsparameter mit dem kritischen Exponenten β . [39]

Die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ und die volle Selbstenergie des σ -Mesons sind in Abb. 4.6 zu sehen. In der oberen Hälfte sieht man den Real- und Imaginärteil des Zwei-Pion-Schleifenintegrals für Temperaturen $T = 0$ MeV und $T = 150$ MeV.

Im Imaginärteil der Selbstenergie kann man mehrere Effekte ausmachen. Zum einen ist die Stärke der Selbstenergie in Schwellennähe bei endlicher Temperatur deutlich erhöht gegenüber dem Vakuum. Bei einer Temperatur von $T = 150$ MeV sieht man einen Anstieg des Imaginärteils auf ungefähr das Doppelte. Neben dem deutlichen Anstieg an der Schwelle erkennt man eine Verschiebung der Schwelle um knapp 10%. Diese Verschiebung rührt daher, daß bei einer Temperatur von $T = 150$ MeV die Masse des Pions bereits auf 150 MeV angestiegen ist, und damit auch die Schwelle bei 300 MeV liegt und nicht mehr beim Vakuumwert von $2m_\pi^0$.

Im Realteil sieht man mit steigender Temperatur eine leichte Verschiebung des Minimums zu höheren Energien, als Folge des gestiegenen Wertes der Pionmasse. Zudem ist das Minimum bei steigender Temperatur deutlicher ausgeprägt. Der Wert des Minimums etwa fällt bei einer Temperatur von 150 MeV um knapp 50 Prozent. Diese Trends setzen sich

mit steigender Temperatur fort.

Die volle Selbstenergie des σ -Propagators sieht man in der unteren Hälfte von Abb. 4.6. Der Realteil der Selbstenergie ist über den gesamten Energiebereich negativ und bewirkt nach Gl.(3.16) eine Verschiebung der Masse des σ -Mesons zu niedrigeren Energien hin. Mit steigender Temperatur fällt der Realteil der Selbstenergie als Folge des fallenden Kondensates bis er dann bei sehr hohen Temperaturen von 500 MeV nahezu verschwindet. Das bedeutet, daß der Effekt der Massenrenormierung aufgrund der Selbstenergie mit steigender Temperatur immer mehr verschwindet und die „effektive“ Masse sich der nackten anpaßt. Da diese aber nach Abb. 4.1 mit steigender Temperatur zunächst stärker abfällt als die Selbstenergie an Stärke verliert, sieht man für die Masse des σ -Mesons den bereits im vorherigen Abschnitt diskutierten Verlauf.

Im Imaginärteil zeigt sich mit steigender Temperatur zum einen die Verschiebung der Schwelle für die Produktion von zwei Pionen zu höheren Energien, resultierend aus der gegenüber dem Vakuum leicht erhöhten Pionmasse, und zum anderen eine deutliche Unterdrückung mit steigender Temperatur.

Nach Gl.(4.34) ist die Selbstenergie proportional dem Wert des Kondensates. Dessen Abfall bewirkt in der Selbstenergie eine deutlich sichtbare Unterdrückung. Bei einer Temperatur von $T = 150$ MeV ist das Kondensat nach Abb. 4.1 um etwa 10 Prozent gefallen, was in sehr guter Übereinstimmung mit dem Abfall von nahezu 20 Prozent in der Selbstenergie ist, die quadratisch vom Kondensat abhängt.

Mit der Selbstenergie läßt sich nun nach Gl.(4.34) der volle Propagator des σ -Mesons berechnen. In Abb. 4.7 ist der Real- und Imaginärteil des Propagators zu sehen. Betrachtet man zunächst den Imaginärteil, fallen mit steigender Temperatur zwei Effekte auf: Zum einen sieht man, daß der Imaginärteil erst Beiträge ab der Produktionsschwelle für zwei Pionen hat, die mit steigender Temperatur leicht ansteigt. Zum anderen sieht man deutliche Unterschiede in der Verteilung. Die Halbwertsbreite nimmt mit steigender Temperatur deutlich ab und das Maximum ist zu niedrigeren Energien hin verschoben. Bei einer Temperatur von $T = 50$ MeV liegt das Maximum bei einer Energie von 450 MeV, und der Imaginärteil hat eine Halbwertsbreite von knapp 400 MeV wie im Vakuum. Das Maximum wandert dann mit steigender Temperaturen zu niedrigeren Energien und liegt bei einer Temperatur von 150 MeV bei nur noch 320 MeV bei gleichzeitiger Reduzierung der Halbwertsbreite auf 160 MeV. Mit steigenden Temperaturen nähert sich der Imaginärteil immer mehr der Form der Deltafunktion an, und bei Temperaturen von über 200 MeV schließlich fällt die Masse des σ -Mesons unter die Produktionsschwelle für zwei Pionen, was zum Verschwinden des Imaginärteils führt.

Während der Imaginärteil des Propagators ein Maß für die Breite eines Teilchens ist, ist die Nullstelle des Realteils in der Breit-Wigner Näherung ein Maß für den Wert der σ -Masse.

Die Position der Nullstelle ändert sich zunächst nur schwach mit steigender Temperatur. Bei einer Temperatur von 50 MeV ist die Masse auf 528 MeV gefallen. Erhöht man die Temperatur weiter, sieht man eine stärker werdende Änderung bis bei einer Temperatur von 150 MeV die Masse einen Wert von knapp 390 MeV annimmt. Bei dieser Temperatur

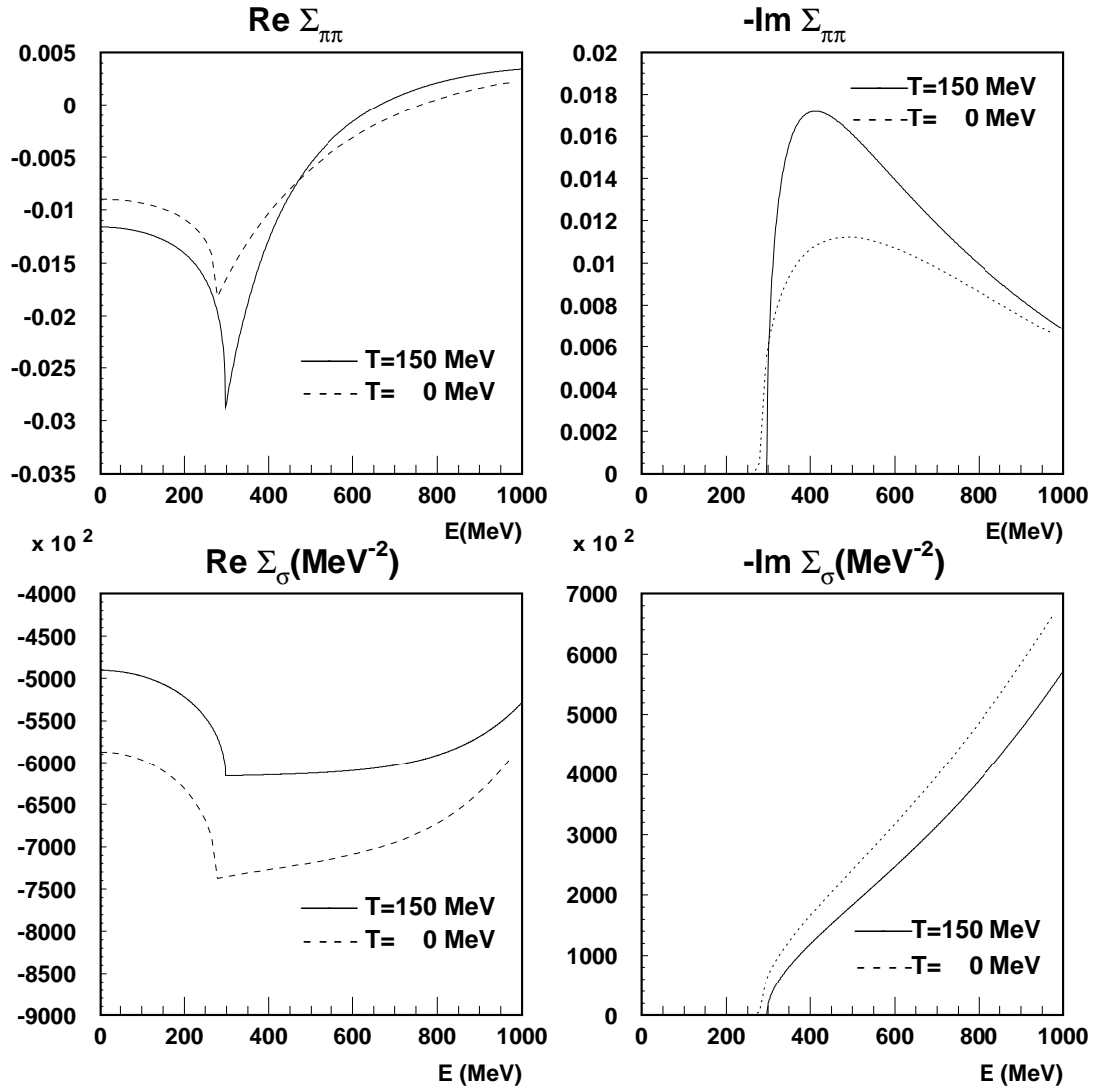


Abbildung 4.6: Im oberen Teil des Bildes sieht man die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ bei einer Temperatur $T=150$ MeV und $T=0$. Im unteren Teil sind der Real- und Imaginärteil der Selbstenergie des σ -Mesons bei den gleichen Temperaturen dargestellt. Die gestrichelte Linie kennzeichnet dabei jeweils den Fall $T=0$, während die durchgezogene Linie das Verhalten bei $T=150$ MeV zeigt.

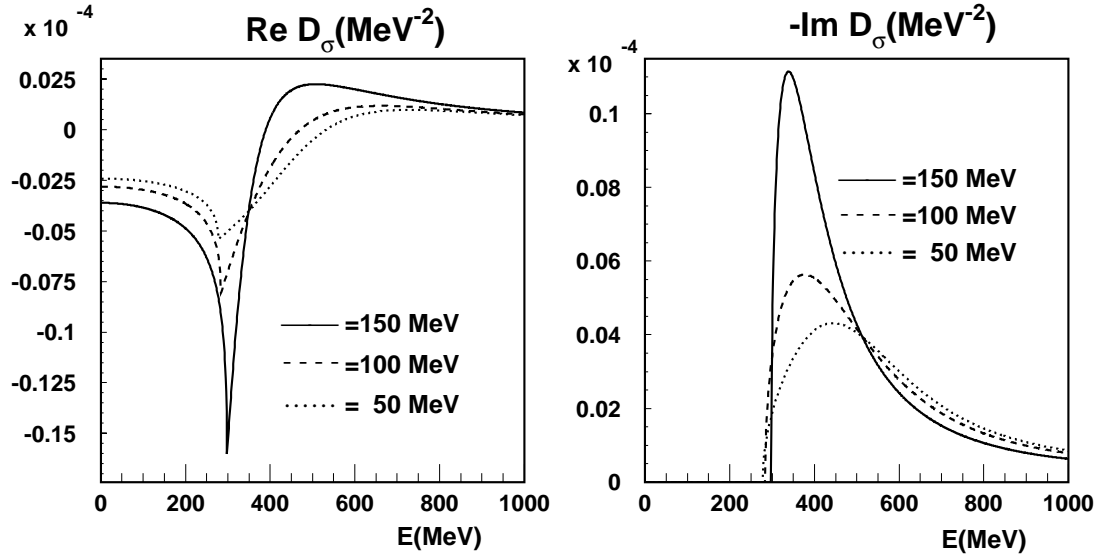


Abbildung 4.7: Real- und Imaginärteil des σ -Propagators bei einer Temperatur von 50 MeV, 100 MeV und 150 MeV.

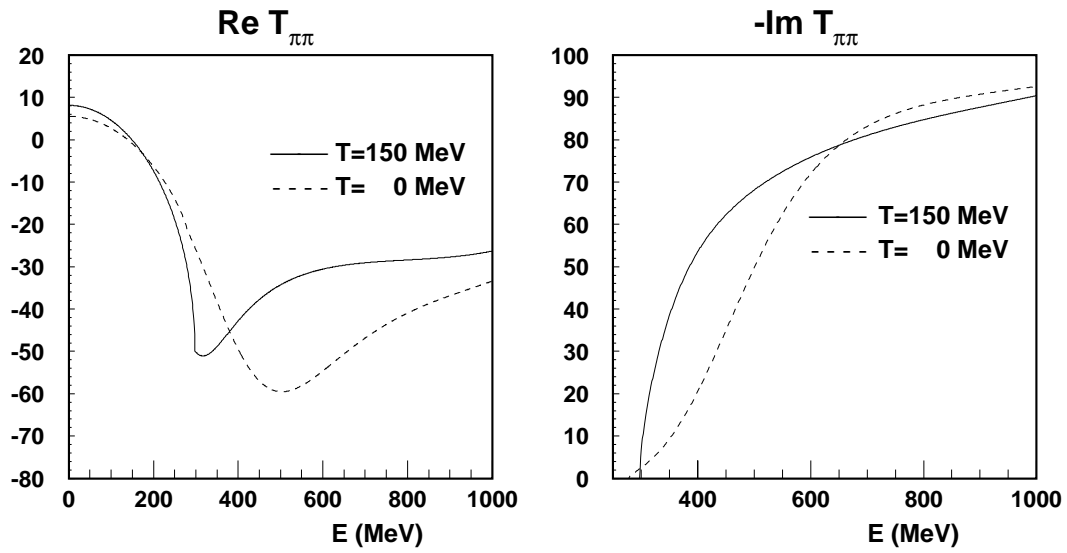


Abbildung 4.8: Real- und Imaginärteil der $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix bei einer Temperatur von 150 MeV. Die gestrichelte Linie steht für $T=0$.

zeigt der Realteil auch ein deutlich ausgeprägtes Minimum, während bei niedrigeren Temperaturen das Minimum noch nicht so scharf abgegrenzt ist. Das Minimum liegt dabei genau an der Schwelle und ist damit auch bei höheren Temperaturen zu höheren Energien hin verschoben. Mit steigender Temperatur rückt zudem die Nullstelle immer näher an das Minimum heran bis sich schließlich bei einer Temperatur knapp oberhalb von 200 MeV eine Polstelle herausbildet. Das σ -Meson kann ab dieser Temperatur nicht mehr in zwei Pionen zerfallen und zeigt ab dieser Temperatur nur noch schwache Änderungen im Propagator.

Die $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix läßt sich nun mit der Ward Identität in Gl.(2.41) berechnen:

$$T_{\pi\pi}(E, \vec{p}) = \frac{D_{\pi}^{-1}(E, \vec{p}) - D_{\sigma}^{-1}(E, \vec{p})}{\langle \sigma \rangle^2} \frac{D_{\sigma}(E, \vec{p})}{D_{\pi}(E, \vec{p})} \quad (4.36)$$

Der Verlauf der Streumatrix ist in Abb. 4.8 dargestellt.

Dabei erkennt man wieder die bereits diskutierten Effekte. Zum einen ist der starke Anstieg des Imaginärteils in der Nähe der Schwelle erwähnenswert, zum anderen die Verschiebung des Minimums im Realteil zu niedrigeren Energien. Wichtig ist, daß auch bei endlichen Temperaturen der Realteil der Streumatrix bei kleinen Energien repulsiv bleibt, wie man erkennen kann.

4.5.1 Einfluß des Dreierimpulses

Im Vakuum konnte man aufgrund der Lorentzinvarianz das System immer bei verschwindendem Dreierimpuls betrachten, wodurch sich die Rechnung und Gleichungen deutlich vereinfachten. Bei endlicher Temperatur ist durch das Auftreten eines Wärmebades ein ausgezeichnetes Referenzsystem vorgegeben, bezüglich dessen die Größen definiert sind, so daß man nicht mehr einfach in das Schwerpunktsystem der Pionen transformieren kann. Aus diesem Grunde wollen wir in diesem Abschnitt den Einfluß des endlichen Dreierimpulses auf den Propagator und die Streumatrix näher untersuchen.

Nach Gl.(4.34) rührt die Impulsabhängigkeit des Propagators vor allem von der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ her. Neben Änderungen in der Selbstenergie bewirkt ein endlicher Dreierimpuls eine Verschiebung der Schwelle und σ -Masse hin zu höheren Energien. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Schwelle bei einer invarianten Masse von $2m_{\pi}$ liegt und diese gegeben ist durch

$$\sqrt{s} = \sqrt{E^2 - \vec{p}^2}. \quad (4.37)$$

Betrachtet man die Selbstenergien und den Propagator als Funktion der invarianten Masse tritt dieser Effekt nicht auf.

Die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$, die sich mittels Gl.(4.28) bei endlichem Dreierimpuls berechnen läßt, ist in Abb. 4.9 dargestellt. Dort sieht man für zwei verschiedene Temperaturen Real- und Imaginärteil von $\Sigma_{\pi\pi}$ bei einem Impuls $|\vec{p}| = 100$ MeV und $|\vec{p}| = 200$ MeV. Neben der bereits angesprochenen Verschiebung in der Energie sieht man im Imaginärteil das Auftreten von Beiträgen im raumartigen Bereich ($E < |\vec{p}|$). Bei genauer Betrachtung

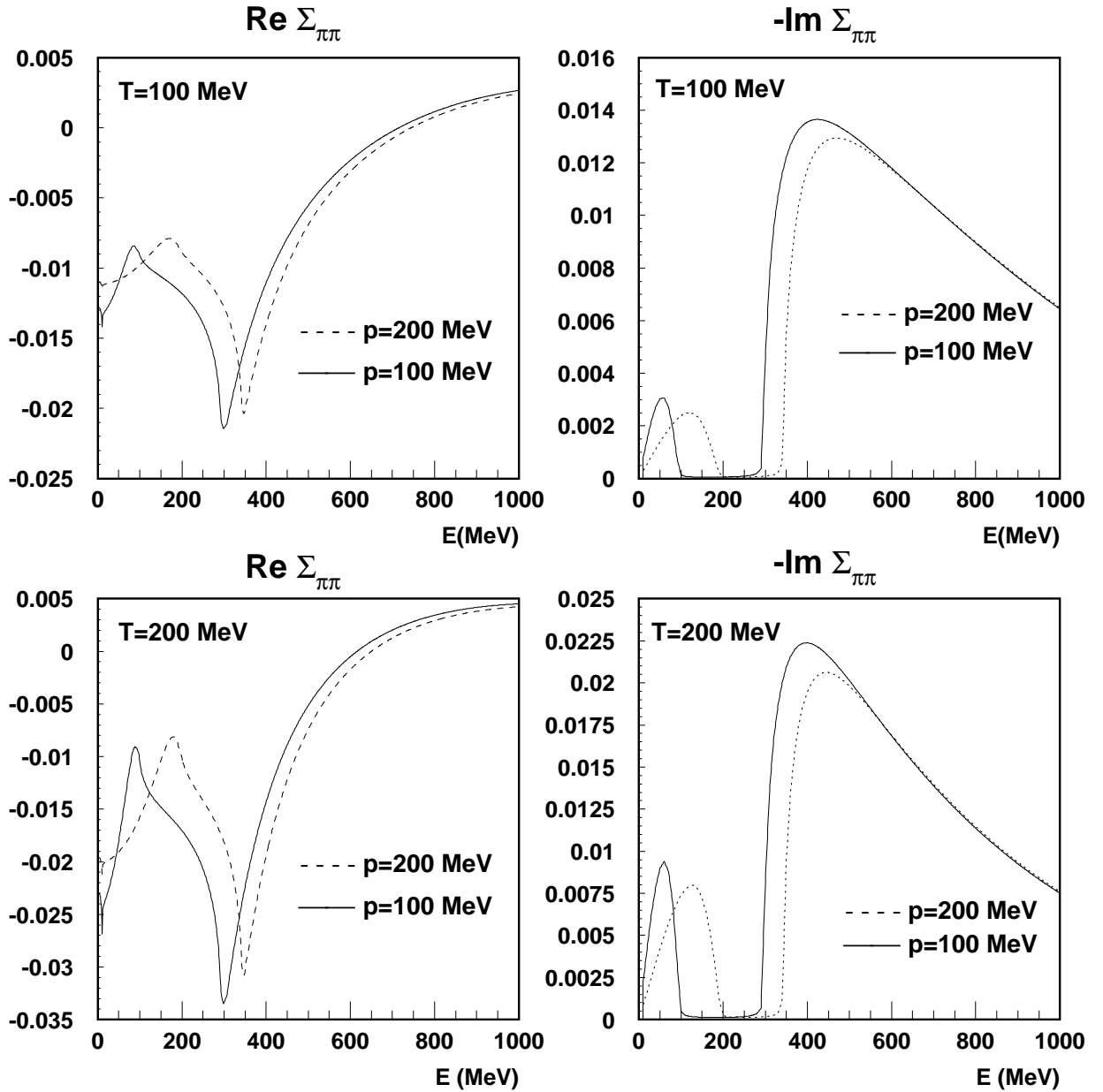


Abbildung 4.9: Die Schleife $\Sigma_{\pi\pi}$ bei verschiedenen Temperaturen für endliche Dreierimpulse. Im raumartigen Bereich sieht man das Auftreten von Stärke durch Kopplungen an thermische Pionen, die mit zunehmendem Dreierimpuls stärker werden. Für hohe Energien erkennt man nur eine sehr schwache Impulsabhängigkeit. Mit steigender Temperatur sieht man eine deutliche Zunahme der Selbstenergie. Die vorhandenen Konturen werden verstärkt.

der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ in Gl.(4.28) kann man zwei Anteile erkennen: Der erste Summand beschreibt, genau wie im Vakuum, den Zerfall eines σ -Mesons in zwei Pionen. Der Energienenner darin verschwindet für $E = \varepsilon_{\pi}(\vec{q}) + \varepsilon_{\pi}(\vec{p} - \vec{q})$ und produziert ab der Schwelle der zweifachen Pionmasse einen Imaginärteil. Bei endlicher Temperatur wird dieser Beitrag durch die mit steigender Temperatur wachsende Pionmasse und durch die Besetzungszahlen modifiziert.

Der zweite Summand in der Selbstenergie beschreibt die Absorption eines σ -Mesons an einem thermischen Pion und liefert Beiträge zum Imaginärteil der Selbstenergie für $E = \varepsilon_{\pi}(\vec{q}) - \varepsilon_{\pi}(\vec{p} - \vec{q})$. Diese Bedingung kann nur erfüllt werden im Energieintervall $E \in [0, p]$, wobei p der Betrag des Dreierimpulses ist. In Abb. 4.9 kann man beide Effekte sehr deutlich erkennen. Bei den betrachteten Impulsen kommt es zu keiner Überschneidung dieser beiden Bereiche und für Energien größer als der Impuls und kleiner als die Schwelle verschwindet der Imaginärteil. Im Realteil sieht man bei dieser Energie das Auftreten eines lokalen Maximums. Vergleicht man die Kurven bei $T = 100$ MeV mit denen bei $T = 200$ MeV, sieht man einen deutlich Zuwachs des Imaginärteils im raumartigen Bereich. Ebenso sind die lokalen Extrema im Realteil deutlicher ausgeprägt. Für hohe Energien von etwa 1 GeV sieht man bei den betrachteten Dreierimpulsen von $p = 100$ MeV und $p = 200$ MeV im Vergleich zum Vakuum nur eine sehr schwache Abweichung. In Abb. 4.10 ist der Propagator bei endlichem Dreierimpuls gezeigt. Die bereits in der Selbstenergie auftretenden Effekte sind wieder erkennbar: Zum einen die Verschiebung der Masse und Schwelle zu höheren Energien, sowie im Imaginärteil des Propagators das Auftreten von Stärke im raumartigen Bereich, also für Energien die unter dem Wert des Dreierimpulses liegen. Verglichen mit der Selbstenergie sind diese Effekte aber deutlich schwächer ausgeprägt. Mit steigender Temperatur geht der Einfluß der Selbstenergie weiter zurück, da die Selbstenergie proportional zum Wert des Kondensates in den Propagator eingeht und bei einer Temperatur von $T = 200$ MeV das Kondensat auf ein Zehntel seines Vakuumwertes abgefallen ist. Daher ist der Propagator bei dieser Temperatur bis auf die Verschiebung nahezu mit dem Propagator im Vakuum identisch, und die Strukturen der Selbstenergie nahezu verschwunden.

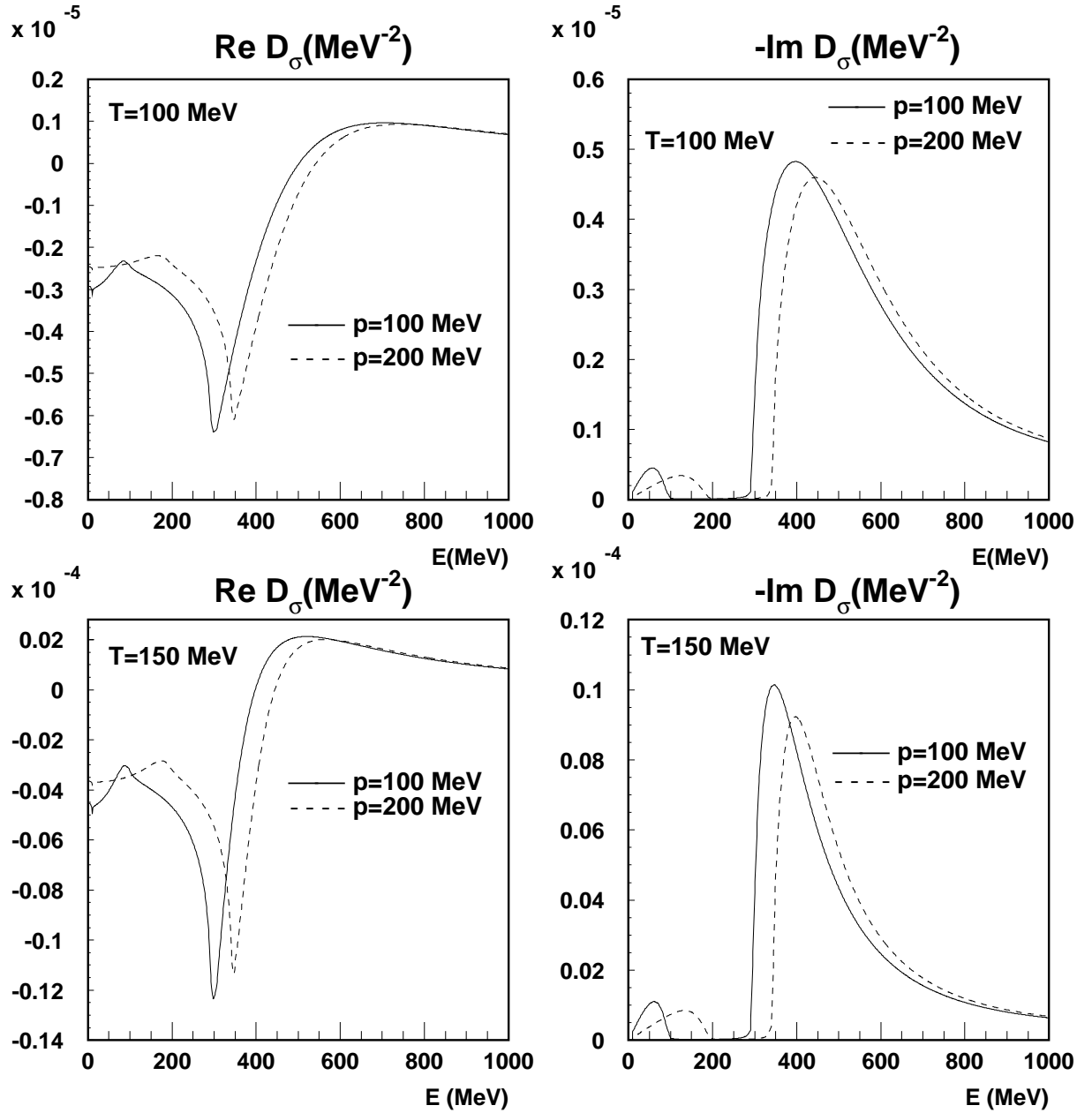


Abbildung 4.10: Der Propagator des σ -Mesons bei verschiedenen Temperaturen für endliche Dreierimpulse. Bei endlichem Dreierimpuls kommt es durch Kopplungen an thermischen Pionen zum Auftreten von Beiträgen im raumartigen Bereich. Zusätzlich erkennt man eine Verschiebung des Maximums im Imaginärteil des Propagators (linke Bildhälfte) zu höheren Energien als Folge des steigenden Dreierimpuls.

Kapitel 5

Das σ -Meson in dichter Materie

Im vorherigen Kapitel wurde das σ -Meson bei endlicher Temperatur untersucht. Im Rahmen des Modells fand man in Übereinstimmung mit der chiralen Symmetrie einen deutlichen Abfall in der σ -Masse als Folge des abnehmenden Kondensates mit steigender Temperatur. Dieses ist der Ordnungsparameter der chiralen Symmetrie, und dessen Verschwinden hebt die spontane Symmetriebrechung auf. Wie bereits in der Einleitung besprochen erwartet man für endliche Dichte ebenso eine Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei einer kritischen Dichte ρ_c . Um das Modell bei endlicher Baryonendichte beschreiben zu können, sind allerdings einige Anpassungen notwendig: Beim Übergang zu dichter Materie treten in der Lagrangedichte die Nukleonen als zusätzliche Freiheitsgrade auf und man muß Kopplungen dieser an die Bosonenfelder zulassen. Die Lagrangedichte im linearen σ -Modell unter Berücksichtigung des fermionischen Anteils lautet [12]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}_F, \\ \mathcal{L}_F &= \bar{\Psi} \left[i\partial_\mu \gamma^\mu + g(\sigma + i\gamma^\mu \vec{\tau}(\partial_\mu \vec{\pi})\gamma_5) \right] \Psi.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Ψ steht dabei für ein freies Nukleonfeld, und $\vec{\tau}$ ist der Vektor aus den Pauli-Matrizen. Für diese, wie auch für die γ -Matrizen, benutzen wir die Konvention aus [44]. Dabei beschränken wir uns auf drei Pionfelder. Die Kopplungskonstante g beschreibt die Stärke der Boson-Fermion Wechselwirkung. Der neu eingeführte Term enthält - neben der freien Propagation eines Fermions - Kopplungen von einem Boson an ein Fermion-Antifermion Paar.

Dieser zusätzliche Term in der Lagrangedichte erzeugt nun Modifikationen in den Bosonpropagatoren, die wir im Folgenden näher untersuchen wollen. Insbesondere ist dabei zu beachten, daß das σ -Meson nicht nur über die Kopplungen an ein Fermion-Antifermionpaar modifiziert wird, sondern ebenso über die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$. Daher wollen wir zunächst das Pion in kalter Kernmaterie betrachten.

5.1 Das Pion in kalter Kernmaterie

Betrachtet man die Wechselwirkung eines Pions mit der umgebenden Kernmaterie, zeigen sich zwei Eigenschaften, die erfüllt sein müssen, um zu einer guten Beschreibung des Pions zu gelangen: Zum einen koppelt das Pion bei den von uns betrachteten Energien sehr stark an die $\Delta(1232)$ -Resonanz und man muß neben den bereits eingeführten πNN Wechselwirkungsterm analog einen $\pi N\Delta$ Term einführen.

$$\mathcal{L}_\Delta = -\frac{f_\Delta}{m_\pi} \bar{\Psi}_\Delta^\mu \vec{T}^\dagger (\partial_\mu \vec{\pi}) \Psi \quad (5.2)$$

\vec{T} bezeichnet hierbei der Isospin-Übergangsoperator, der das Pion und das Nukleon zu einem $\Delta(1232)$ koppelt.

Zum anderen zeigt sich, daß die s-Wellen Wechselwirkung schwach ist gegenüber den dominanten p-Wellen Beiträgen [45] und kann daher bei den von uns betrachteten Energien und Impulsen vernachlässigt werden. Daher treten in der Lagrangedichte für das Pion keine s-Wellen Anteile auf.

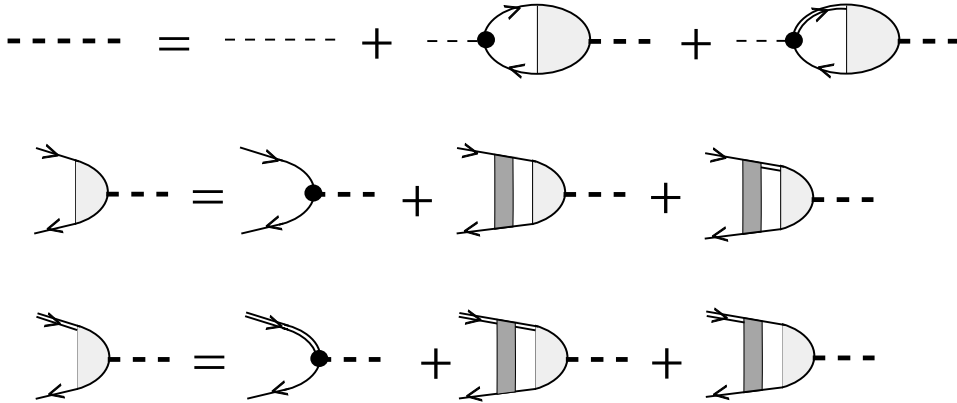


Abbildung 5.1: Dyson-Schwinger Gleichung für die Kopplung des Pions an Teilchen-Loch- (durchgezogene Linie) und Δ -Loch-Anregungen (doppelt durchgezogene Linie). Die zweite Zeile zeigt die effektive πNN -Kopplung und in der dritten Zeile sieht man die $\pi\Delta N$ -Kopplung. Kurzreichweitige Korrelationen werden durch das Einführen von Migdal-Parametern realisiert (siehe Text) und sind durch die grau gezeichneten Bereiche gekennzeichnet.

Die Kopplung an die Teilchen-Loch- und Delta-Loch-Anregungen, wie in Abb. 5.1 gezeigt, ergeben dann Selbstenergiebeiträge zum Pion, analog zu den Selbstenergiebeiträgen zum σ -Meson im Vakuum durch die Schleife aus zwei Pionen. Der Pionpropagator kann dann unter Vernachlässigung anderer Beiträge geschrieben werden als:

$$D_\pi(E, \vec{p}) = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m_\pi^2 - \Sigma_\pi(E, \vec{p})}. \quad (5.3)$$

mit der Selbstenergie

$$\Sigma_\pi(p_0, \vec{p}) = -\vec{p}^2(\tilde{\chi}_{NN^{-1}} + \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}), \quad (5.4)$$

Hierbei wurden die pionischen Suszeptibilitäten $\tilde{\chi}_{NN^{-1}}$ und $\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}$ eingeführt:

$$\tilde{\chi}_{NN^{-1}}(p_0, \vec{p}) = -4 \frac{f_{\pi NN}^2 \Gamma_\pi^2(\vec{p})}{m_\pi^2} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} G_N(q) G_N(q + p) \quad (5.5)$$

$$\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(p_0, \vec{p}) = -\frac{16}{9} \frac{f_{\pi \Delta N}^2 \Gamma_\pi^2(\vec{p})}{m_\pi^2} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} G_N(q) (G_\Delta(q + p) + G_\Delta(q - p)). \quad (5.6)$$

G_N, G_Δ sind die nichtrelativistischen Nukleon- respektive Delta-Propagatoren, $f_{\pi NN}, f_{\pi \Delta N}$ die $\pi NN^{-1}, \pi \Delta N^{-1}$ Kopplungskonstanten, und $\Gamma_\pi(\vec{q})$ ist ein Formfaktor, der die endliche Ausdehnung der Pion-Baryonen-Vertizes berücksichtigt.

$$\Gamma_\pi(\vec{q}) = \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{\Lambda^2 + \vec{q}^2} \quad \Lambda = 1.2 \text{ GeV}, \quad (5.7)$$

Die Vorfaktoren schließlich ergeben sich aus den entsprechenden Spin-Isospin Übergangsoperatoren. Die explizite Form der pionischen Suszeptibilitäten und die verwendeten Kopplungskonstanten sind in Anhang D dargestellt.

Ein einfaches Modell allerdings, das nur die Anregungen von Teilchen-Loch- und Delta-Loch-Zuständen beschreibt, kann keine befriedigenden Resultate liefern aufgrund der fehlenden Implementierung der kurzreichweitigen repulsiven Wechselwirkungen der Nukleonen und von Nukleon und Delta-Resonanz. Ohne diese repulsive Wechselwirkung setzt Pionkondensation bereits unterhalb der Sättigungsdichte von Kernmaterie $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ ein [46]. Durch Einführung sogenannter Migdal-Parameter können diese jedoch berücksichtigt werden. Dies führt zunächst auf ein gekoppeltes System für die Suszeptibilitäten (Abb. 5.1) :

$$\begin{aligned} \chi_{NN^{-1}} &= \tilde{\chi}_{NN^{-1}} - \tilde{\chi}_{NN^{-1}} g_{NN} \chi_{NN^{-1}} - \tilde{\chi}_{NN^{-1}} g_{N\Delta} \chi_{\Delta N^{-1}} \\ \chi_{\Delta N^{-1}} &= \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}} - \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}} g_{\Delta N} \chi_{NN^{-1}} - \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}} g_{\Delta\Delta} \chi_{\Delta N^{-1}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

$\chi_{NN^{-1}}$ und $\chi_{\Delta N^{-1}}$ enthalten dadurch die repulsive Wechselwirkung und tragen zur Stabilisierung des Pions gegenüber Kondensation bei. Nach Auflösung dieser Matrixgleichung nach $\chi_{NN^{-1}}$ und $\chi_{\Delta N^{-1}}$ läßt sich dann die volle Pion selbstenergie berechnen.

$$\begin{aligned} \Sigma_\pi(E, \vec{p}) &= -\vec{p}^2 \chi_\pi(E, \vec{p}) = -\vec{p}^2 (\chi_{NN^{-1}} + \chi_{\Delta N^{-1}}) \\ &= -\vec{p}^2 \frac{\tilde{\chi}_{NN^{-1}} + \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}} + \tilde{\chi}_{NN^{-1}} \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}} (2g_{N\Delta} - g_{NN^{-1}} - g_{\Delta N^{-1}})}{(1 + g_{NN^{-1}} \tilde{\chi}_{NN^{-1}})(1 + g_{\Delta N^{-1}} \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}) - g_{N\Delta}^2 \tilde{\chi}_{NN^{-1}} \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dabei haben wir in Übereinstimmung mit [47] folgende Werte für die Migdal-Parameter gewählt:

$$g_{\Delta\Delta} = g_{N\Delta} = g_{\Delta N} = 0.5, \quad g_{NN} = 0.8. \quad (5.10)$$

Benutzt man diese Werte erhält man schließlich den in Abb. 5.2 gezeigten Verlauf für das Pion bei endlicher Dichte und endlichem Dreierimpuls. In der oberen Bildhälfte ist zunächst die Selbstenergie des Pions bei Kernmateriedichte für Impulse von $p = 250$ MeV und $p = 500$ MeV gezeigt, während in der unteren Hälfte Real- und Imaginärteil des Pionpropagators zu sehen sind. Deutlich kann man im Imaginärteil drei Bereiche ausmachen. Bei geringen Energien sieht man den Beitrag der Teilchen-Loch Kopplungen. Diese sind für Impulse von $p \approx 250$ MeV sehr stark ausgeprägt und grenzen sich von anderen Bereichen im Propagator ab. Man kann sehr gut den zunächst linearen Anstieg in der Teilchen-Loch Selbstenergie erkennen, der dann in einen quadratischen Abfall übergeht. Zudem erkennt man schwach die Δ -Loch Beiträge für Energien zwischen $q_0 = 300$ MeV und $q_0 = 400$ MeV. Betrachtet man den Pionpropagator bei einem höheren Dreierimpuls von $|\vec{p}| = 500$ MeV sind die Δ -Loch Beiträge viel stärker ausgeprägt und zu höheren Energien verschoben. Die Teilchen-Loch Beiträge allerdings haben an Stärke verloren und erstrecken sich über einen größeren Energiebereich. Zudem ist der lineare Anstieg aus dem Spektrum verschwunden. Das liegt an der speziellen Form der Teilchen-Loch Selbstenergie, die für Impulse größer als der zweifache Fermiimpuls eine andere Form hat, als für Impulse unterhalb dieser Schwelle. Der mittlere Peak ist der „pionische Ast“. Bei einem Impuls von $p \approx 250$ ist dieser dominant, nimmt aber mit zunehmendem Impuls ab und ist bei einem Impuls von $|\vec{p}| = 500$ MeV vergleichbar mit den Teilchen-Loch und Δ -Loch Beiträgen.

5.2 σ -Meson bei endlicher Dichte

Durch die Einführung der Fermionen in der Lagrangedichte müssen bei der Berechnung des σ -Mesons zusätzliche Graphen berechnet werden. Eine erlaubte Kopplung an das Medium ist die Teilchen-Loch Schleife, die wir bereits für das Pion berücksichtigt haben. Daneben muß man auch den Tadpolegraphen (siehe Abb. 5.3, links) berechnen, der eine dichteabhängige Reduzierung der Masse des σ -Mesons bewirkt [48]. Für das Pion hatten wir diesen Graphen nicht berücksichtigt, da er gegenüber der p-Wellen Wechselwirkung unterdrückt ist. Zudem ist die Masse des Pions aufgrund der zugrundeliegenden chiralen Symmetrie gegenüber starken Modifikationen geschützt.

Im Gegensatz zum Pion sind für das σ -Meson Kopplungen an die $\Delta(1232)$ -Resonanz irrelevant, da aufgrund der Quantenzahlen des σ -Mesons eine Kopplung an ein Δ -Loch nicht erlaubt ist. Die nächsthöher gelegene Nukleonresonanz an die das σ -Meson koppeln kann ist die Roperresonanz ($N^*(1440)$), die wir zunächst auch berücksichtigen wollen. In Abb. 5.3 sind die Kopplungen des σ -Mesons im Medium grafisch dargestellt. Die dort auftretenden Boson-Fermion Vertizes haben zunächst unbekannte Kopplungskonstanten.

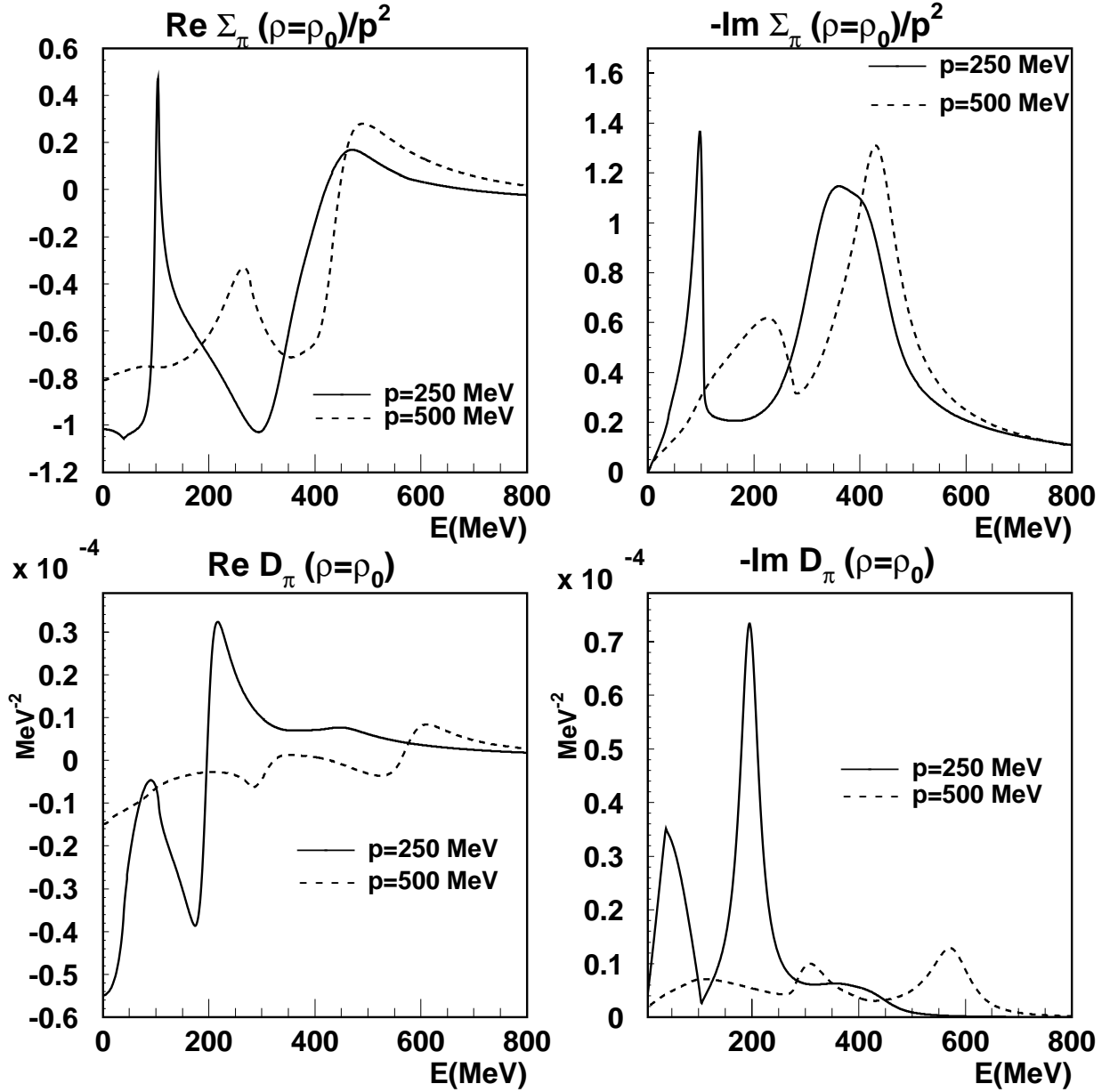


Abbildung 5.2: Die oberen beiden Bilder zeigen Real- und Imaginärteil der Selbstenergie des Pions bei Sättigungsdichte für zwei verschiedene Dreierimpulse. Im unteren Teil sieht man dann den zugehörigen Pionpropagator. Deutlich kann man im Imaginärteil die Beiträge aus Kopplungen an Teilchen-Loch (1. Maximum) und Δ -Loch (3. Maximum) unterscheiden. Für Impulse bis etwa 300 MeV sind die Δ -Loch-Beiträge allerdings noch schwach, so daß dieses Maximum noch nicht so ausgeprägt ist.

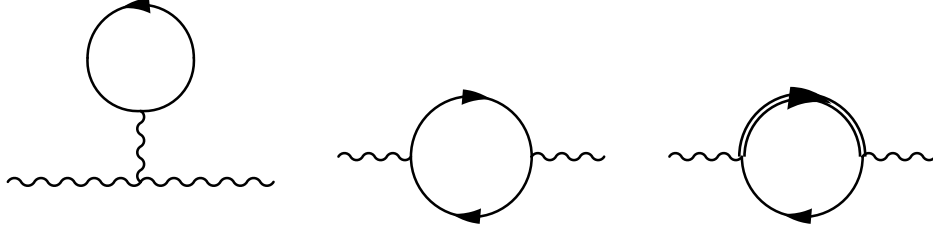


Abbildung 5.3: Kopplungen des σ -Mesons an Tadpole- und Teilchen-Loch-Graphen, sowie N^* -Loch.

Im Fall des Pions konnten die Kopplungsstärken $f_{\pi NN}$ und $f_{\pi \Delta N}$ aus dem Experiment gewonnen werden und nehmen die in Anhang D beschriebenen Werte an. Im Fall des σ -Mesons lassen sich entsprechende Streuexperimente zur Ermittlung der Kopplungskonstanten aufgrund der großen Breite nur schwer durchführen. In Abschnitt 5.3 werden wir uns mit ihrer Bestimmung noch einmal intensiver beschäftigen und versuchen, diese aus einem Streuexperiment zu extrahieren.

Die Berechnung der in Abb. 5.3 gezeigten Graphen ergibt folgenden Beitrag zur Selbstenergie des σ -Mesons:

$$\Sigma_{med} = f_{\sigma NN} \frac{I_N}{\langle \sigma \rangle} + f_{\sigma NN}^2 \Sigma_{NN-1}^\sigma(E, \vec{p}) + f_{\sigma N^* N}^2 \Sigma_{N^* N-1}^\sigma(E, \vec{p}). \quad (5.11)$$

Dabei bezeichnen $\Sigma_{NN-1}^\sigma(E, \vec{p})$ und $\Sigma_{N^* N-1}^\sigma(E, \vec{p})$ den Beitrag zur Selbstenergie aus der Teilchen-Loch Schleife, und der N^* -Loch Schleife. I_N steht für die nukleonische Tadpole-schleife. Ihre explizite Form ist gegeben durch die Integrale

$$\Sigma_{NN-1}^\sigma(E, \vec{p}) = -2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\omega(\vec{q})\omega(\vec{q} - \vec{p}) - \vec{q} \cdot (\vec{q} - \vec{p}) + m_N^2}{\omega(\vec{q})\omega(\vec{p} - \vec{q})} \frac{n(\vec{q}) - n(\vec{p} - \vec{q})}{E - \omega(\vec{p} - \vec{q}) + \omega(\vec{q})} \quad (5.12)$$

$$\Sigma_{N^* N-1}^\sigma(E, \vec{p}) = -4 \frac{f_{\sigma N^* N}^2 \Gamma_\sigma^2(\vec{p})}{m_\pi^2} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} G_N(q) (G_{N^*}(q + p) + G_{N^*}(q - p)) \quad (5.13)$$

$$I_N = -8 \int_0^{p_F} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{m_N}{2\sqrt{\vec{q}^2 + m_N^2}}, \quad (5.14)$$

wobei $n(\vec{q})$ die fermionische Besetzungszahl ist und p_F der zur Dichte ρ gehörige Fermi-impuls, der sich aus folgender Beziehung berechnet:

$$p_f = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi^2\rho}. \quad (5.15)$$

Die explizite Form des Nukleonpropagators ist in Anhang D gegeben und die N^* -Loch Schleife lässt sich analog zur Δ -Loch Schleife in folgende Form überführen:

$$\Sigma_{N^*N^{-1}}^\sigma(E, \vec{p}) = -4 \frac{f_{\sigma N^*N}^2 \Gamma_\sigma^2(\vec{p})}{m_\pi^2} \rho \left(\frac{1}{E - \epsilon_{N^*N^{-1}} + \frac{i}{2} \Gamma_{N^*}} - \frac{1}{E + \epsilon_{N^*N^{-1}}} \right) \quad (5.16)$$

mit

$$\epsilon_{N^*N^{-1}} = m_{N^*} - m_N + \frac{\vec{p}^2}{2m_{N^*}}. \quad (5.17)$$

Der Tadpole schließlich lässt sich analytisch berechnen und man erhält nach Ausführung des Integrals in Gl.(5.14)

$$I_N = -\frac{m_N}{\pi^2} \left(p_F \sqrt{p_F^2 + m_N^2} - m_N^2 \ln \frac{p_F + \sqrt{p_F^2 + m_N^2}}{m_N} \right) \quad (5.18)$$

Für die Roperresonanz wählen wir in Übereinstimmung mit [15] eine Masse von 1440 MeV und eine konstante Breite von 350 MeV. Die auftretenden Kopplungskonstanten und Formfaktoren in der N^* -Loch Selbstenergie sind wiederum zunächst freie Parameter. Die Kopplungskonstante $f_{\sigma NN^*}$ setzen wir auf den Wert 5 in Anlehnung an den Wert den man aus experimentellen Streudaten gewinnen kann [49] und den Abschneideparameter λ , der in dem Formfaktor auftaucht, auf den Wert 1200 MeV. Bei expliziter Berechnung der Selbstenergie findet man, daß der Einfluß der Roperresonanz aufgrund des Massenunterschiedes im Energienenner bei kleinen Energien gegenüber den Teilchen-Loch Beiträgen stark unterdrückt ist und bei hohen Energien die Zweipionselbstenergie eine dominante Rolle bei der Berechnung der Selbstenergie spielt, wie wir im Folgenden sehen werden, so daß die Kopplungen an diesen Kanal in unserem Modell keinen wesentlichen Einfluß haben.

Neben den Modifikationen durch direkte Kopplungen an das Medium, muß man für den σ -Propagator die impliziten Änderungen durch den geänderten Pionpropagator betrachten. Dieser erhielt im Medium einen Selbstenergiebeitrag durch die Kopplungen an Teilchen-Loch und Δ -Loch Schleifen. Die Selbstenergie der Pionschleife lässt sich im Medium aufgrund dieser Beiträge nur noch numerisch berechnen. Durch Ausnutzung der Spektraldarstellung der Pionen

$$D_\pi(q_0, \vec{q}) = - \int_0^\infty \frac{d\omega^2}{\pi} \frac{\text{Im} D_\pi(\omega, \vec{q})}{q_0^2 - \omega^2 + i\epsilon}. \quad (5.19)$$

und folgender Form des Zweipionpropagators

$$G_{\pi\pi}(E, \vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega_1^2 \int_0^\infty d\omega_2^2 \text{Im} D_\pi(\omega_1, \vec{q}) \text{Im} D_\pi(\omega_2, \vec{p} - \vec{q}) \times \frac{1}{2\omega_1\omega_2} \frac{\omega_1 + \omega_2}{E^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2 + i\epsilon}. \quad (5.20)$$

erhält man für Real- und Imaginärteil des σ -Propagators schließlich:

$$\begin{aligned}\text{Im}G_{\pi\pi}(E, \vec{q}, \vec{p}) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega_1 \int_0^\infty d\omega_2 \text{Im}D_\pi(\omega_1, \vec{q}) \text{Im}D_\pi(\omega_2, \vec{p} - \vec{q}) \delta(E - (\omega_1 + \omega_2)) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^E d\omega_1 \text{Im}D_\pi(\omega_1, \vec{q}) \text{Im}D_\pi(E - \omega_1, \vec{p} - \vec{q}) \\ \text{Re}G_{\pi\pi}(E, \vec{p}) &= -\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dE'^2}{\pi} \frac{\text{Im}G_{\pi\pi}(E', \vec{p})}{E^2 - E'^2}.\end{aligned}\tag{5.21}$$

Aus diesem lässt sich dann die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ berechnen

$$\Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p}) = - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} G_{\pi\pi}(E, \vec{q}, \vec{p}) v(\vec{q})^2, \tag{5.22}$$

Dieses Vorgehen vereinfacht den numerischen Rechenaufwand deutlich, da anstatt der ursprünglichen Energieintegration von $-\infty$ bis $+\infty$ lediglich eine Integration von 0 bis zur Energie E ausgeführt werden muß.

Die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ ist in Abb. 5.4 gezeigt. Im Imaginärteil der Selbstenergie lassen sich mit steigender Dichte zwei Effekte ausmachen. Im Vergleich zum Vakuum (strichpunktierte Kurve) erhält der Imaginärteil bei endlicher Dichte Beiträge unterhalb der Zwei-Pion-Schwelle durch die Kopplungen vor allem an Teilchen-Loch Anregungen wie bereits im vorigen Abschnitt diskutiert (gestrichelte und durchgezogene Kurve). Zusätzlich ist das Maximum zu niedrigeren Energien verschoben und stark erhöht gegenüber dem Vakuum. Bei Kernmateriedichte liegt das Maximum bei etwa 300 MeV und ist auf das Dreifache des Vakuumwertes angewachsen. Für Energien oberhalb 800 MeV sieht man hingegen nur noch kleine Unterschiede zwischen der Selbstenergie im Medium und im Vakuum. Im Realteil (linke Kurve) zeigt sich ebenso die Verschiebung hin zu kleineren Energien und das Minimum ist stärker ausgeprägt.

Zusammenfassend ist damit der σ -Propagator im Medium gegeben als

$$D_\sigma(E, \vec{p}) = \left[E^2 - \vec{p}^2 - \varepsilon_\sigma^2 - \Sigma_\sigma \right]^{-1}, \tag{5.23}$$

wobei die volle Selbstenergie Σ_σ im Medium gegeben ist durch

$$\Sigma_\sigma = g_{\sigma N}^2 \Sigma_{NN}^\sigma(E, \vec{p}) - f_{\sigma NN}^2 \frac{I_N}{\langle \sigma \rangle} + f_{\sigma NN}^2 \Sigma_{N^*N}^\sigma(E, \vec{p}) + \frac{2\lambda^4 \langle \sigma \rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})}{1 - \lambda^2 \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})}. \tag{5.24}$$

Anzumerken ist hier, daß die „Selbstenergie“ $\Sigma_{\pi\pi}$ durch die Modifikationen des Pions nun eine dichteabhängige Größe ist.

Erste Rechnungen mit dieser Form des σ -Propagators haben jedoch gezeigt, daß bereits bei Kernmateriedichten Instabilitäten auftreten. Um diese zu beheben, müssen wir einen repulsiven Anteil hinzufügen. Dabei bedienen wir uns des ω -Mesons und berücksichtigen in der Teilchen-Loch Wechselwirkung den σ - ω - Austausch, der einen repulsiven Beitrag liefert. Dessen genaue Form und die noch unbestimmte Kopplungskonstante $f_{\sigma NN}$ wollen wir im folgenden Abschnitt bestimmen, indem wir einen Vergleich mit einem Streuexperiment machen, in dem skalare Dichte-Fluktuationen gemessen wurden.

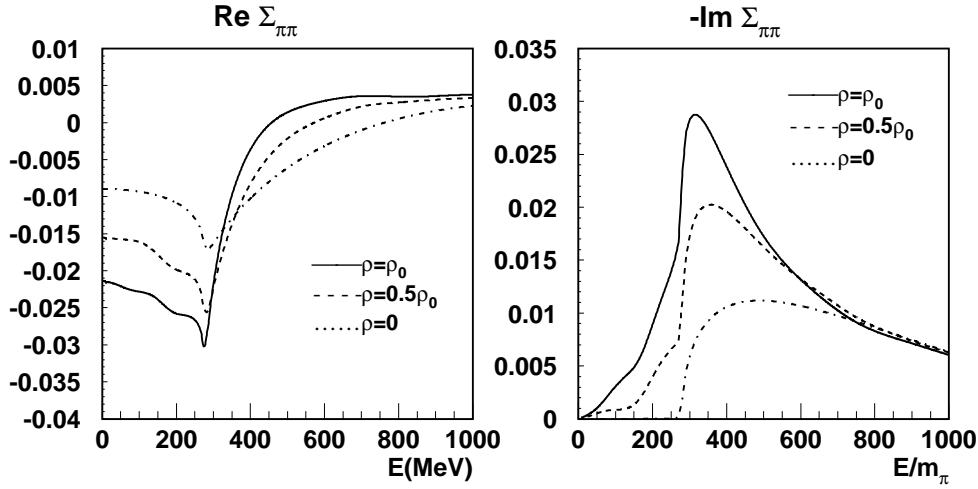


Abbildung 5.4: Die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ als Funktion der Energie bei halber Kernmateriedichte (gestrichelt) und Kernmateriedichte (durchgezogen), verglichen mit dem Vakuum (strich-punktiert).

Im Realteil sieht man eine deutliche Verschiebung der Funktion hin zu niedrigeren Energien (links). Im Imaginärteil ist ein Anwachsen von Stärke in der Nähe der Produktionsschwelle für zwei Pionen zu erkennen. Zudem erkennt man deutlich die Beiträge unterhalb der Schwelle, aufgrund der Kopplungen an Teilchen-Loch Anregungen (rechts).

5.3 Die skalare Suszeptibilität

Die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie sagt neben der Entartung der Massen auch das Auftreten von starken Fluktuationen in der skalaren Suszeptibilität voraus [50], [51]. Bei nuklearer Dichte befindet man sich noch deutlich unterhalb der kritischen Dichte. Eine teilweise Wiederherstellung der chiralen Symmetrie allerdings hat bereits stattgefunden, wie man am deutlichen Abfall des Quarkkondensates und der damit verbundenen Nukleonmasse erkennen kann [52]. In diesem Zusammenhang ist es interessant zu untersuchen, inwieweit bereits große Fluktuationen in der skalaren Suszeptibilität zu beobachten sind [53].

Im Rahmen der Quantenchromodynamik (QCD) ist der symmetriebrechende Term in der Lagrangedichte gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\chi SB}^{QCD} = -2m_q \bar{q}q. \quad (5.25)$$

In unserem effektiven Modell ist der Term proportional dem σ -Feld für die explizite Brechung der chiralen Symmetrie verantwortlich. Das bedeutet, die Fluktuationen in der

Quarkdichte werden durch das σ -Feld getragen. Diese Verknüpfung der zugrundeliegenden Freiheitsgrade mit effektiven Freiheitsgraden findet sich auch in der Gell-Mann-Oakes-Renner Beziehung [54]. Unter Ausnutzung dieser erhält man einen Zusammenhang zwischen den Quarkkorrelatoren und dem skalaren Korrelator unserer effektiven Theorie [55]

$$\frac{\langle \bar{q}q(x)\bar{q}q(0) \rangle}{\langle \bar{q}q \rangle_{vac}^2} = \frac{\langle \sigma(x)\sigma(0) \rangle}{f_\pi^2}. \quad (5.26)$$

Die zugehörige skalare Suszeptibilität berechnet sich zu

$$\chi_S = 2 \frac{\langle \bar{q}q \rangle_{vac}}{f_\pi^2} \text{Re} D_\sigma(E=0, \vec{q}=0) \quad (5.27)$$

Experimentelle, direkte Messungen des Propagators sind zwar nicht möglich, allerdings lassen sich durch Streuexperimente mit Sonden, die direkt an die skalare Dichte der Nukleonen koppeln, indirekte Messungen anstellen. Um Zugang zu den skalaren Dichte-Fluktuationen zu erhalten wurde von Alberico et al. [56] vorgeschlagen, die tief inelastischen Elektronstreuexperimente an verschiedenen Kernen zu untersuchen. Diese Streuexperimente enthalten zunächst eine transversale wie longitudinale Komponente. Der transversale Anteil enthält jedoch Kopplungen an den Spin und ist daher für uns uninteressant. Der longitudinale Anteil hat einen isoskalaren und isovektoriellen Anteil, wobei wir am isoskalaren Anteil interessiert sind, um nähere Aussagen über den σ -Propagator treffen zu können. Insbesondere ist zu erwähnen, daß diese Streuexperimente den Niederenergiebereich bei endlichem Dreierimpuls ausleuchten und damit den in diesem Bereich dominanten Anteil der Teilchen-Loch Wechselwirkung. In [56] konnte im Rahmen einer RPA-Berechnung eine Separation des isoskalaren Anteils von dem isovektoriellen Anteil durchgeführt werden, die zudem in guter Übereinstimmung mit dem Experiment ist. Mithilfe von phänomenologischen Teilchen-Loch Kräften konnte dann die longitudinale Responsefunktion des Mediums folgendermaßen parametrisiert werden:

$$S_L^{RPA}(\omega, \vec{q}) = -4\text{Im} \int_0^{R_c} dR R^2 \Pi^0(\omega, \vec{q}, p_f(R)) \left[\frac{1}{1 - V_{ph}^{\tau=0} \Pi^0(\omega, \vec{q}, p_f(R))} + \frac{1}{1 - V_{ph}^{\tau=1} \Pi^0(\omega, \vec{q}, p_f(R))} \right]. \quad (5.28)$$

Dabei wurde die Ladungsverteilung der streuenden Kerne durch ein Woods-Saxon Potential angenähert, aus dem sich der Ladungsradius des Kerns R_c und der Fermiimpuls $p_f(R)$ berechnen lassen. Π^0 ist die bekannte Lindhardfunktion [37].

In einer Arbeit von Chanfray et al. [55] wurde dann gezeigt, welcher mikroskopische Zusammenhang zwischen der gemessenen skalaren Polarisationsfunktion und dem σ -Propagator in einem Standard σ - ω -Modell besteht. Die skalare Polarisationsfunktion ist

gegeben durch

$$\Pi_S = \frac{f_{\sigma NN}^2 \Pi^0}{1 - (f_{\sigma NN}^2 D_\sigma^0 - f_{\omega NN}^2 D_\omega^0) \Pi^0}, \quad (5.29)$$

und damit ergibt sich für den σ -Propagator in unserem Modell:

$$D_\sigma = D_\sigma^0 \frac{1 + f_{\omega NN}^2 D_\omega^0 \Pi^0}{1 - (f_{\sigma NN}^2 D_\sigma^0 - f_{\omega NN}^2 D_\omega^0) \Pi^0}. \quad (5.30)$$

Vergleicht man Gl.(5.29) mit Gl.(5.28) kann man für das Potential folgenden Zusammenhang ablesen:

$$V_{ph}^{\tau=0} = f_{\sigma NN}^2 D_\sigma^0 - f_{\omega NN}^2 D_\omega^0. \quad (5.31)$$

D_σ^0 steht dabei für den in Gl.(5.23) eingeführten σ -Propagator ohne den repulsiven Beitrag durch den σ - ω -Austausch. Diese Effekte sind bereits durch die Form des Polarisationspropagators berücksichtigt und tauchen dann im vollen σ -Propagator in Gl.(5.30) auf. Für den ω -Propagator wählen wir

$$D_\omega(\omega, \vec{q}) = \frac{1}{\omega^2 - \vec{p}^2 - m_\omega^2 + i\Gamma m_\omega}, \quad (5.32)$$

mit einer Masse $m_\omega = 782$ MeV und einer konstanten Breite $\Gamma = 8.5$ MeV [15].

Untersuchungen haben allerdings gezeigt, daß die in Gl.(5.31) geforderte Form für die Teilchen-Loch Stärke immer noch zu zu großer Anziehung führt. Um diese ein wenig abzumildern ohne auf unrealistisch große Kopplungskonstanten $f_{\omega NN}$ zurückgreifen zu müssen, haben wir zusätzlich eine repulsiv wirkende, impuls- und dichteabhängige NN-Punktwechselwirkung eingeführt. Damit erhält man in unserem effektiven Modell für die Teilchen-Loch Stärke:

$$V_{ph}^{\tau=0} = f_{\sigma NN}^2 D_\sigma^0 - f_{\omega NN}^2 D_\omega^0 - \frac{f_{NN}^2 \rho}{m_N^2 \rho_0} F(q)$$

$$F(q) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + q^2}, \quad \lambda = 400 \text{ MeV} \quad (5.33)$$

Um mittels Gl.(5.33) die Teilchen-Loch Kraft in unserem mikroskopischen Modell berechnen zu können, müssen zunächst die Kopplungsstärken für die σNN -, ωNN - und NN -Wechselwirkungen bekannt sein. Im Rahmen von anderen mikroskopischen Modellen, wie dem Walecka-Modell [58] oder Bestimmungen des NN-Potentials mittels Meson Austauschmodellen [57], sind für diese folgende Werte berechnet worden:

	$f_{\sigma NN}$	$f_{\omega NN}$
Bonn (OBEP)	7.07	10.60
Walecka	9.70	12.59
Migdal	8.30	6.43

Der Parametersatz „Migdal“ ist dabei einem modifizierten Walecka-Modell entnommen und die Parameter im Rahmen dieses Modells an die Eigenschaften von Kernmaterie angepaßt [58]. Wir haben diesen Parametersatz übernommen und den freien Parameter f_{NN} derart gewählt, daß bei verschwindendem Impuls die Teilchen-Loch Stärke mit der im Experiment beobachteten übereinstimmt.

Dabei ergibt sich für die Kopplungskonstante f_{NN} ein Wert von

$$f_{NN} = 18.45. \quad (5.34)$$

In Abb. 5.5 sieht man für den ^{12}C Kern einen Vergleich der Teilchen-Loch Stärken, die zum einem mithilfe unseres effektiven Modells berechnet wurden und zum anderen mit dem vorgestellten Modell in [56]. Als Funktion des Radius, sind die Stärken bei verschwindendem Impuls gezeigt. Dabei wurde für den ^{12}C Kern eine Fermi-Verteilung gewählt, womit sich in der lokalen Dichtenäherung der Radius in eine effektive Dichte umrechnen lässt. Die Parameter dieser Verteilung sind dabei an die experimentelle Protonendichteverteilung angepaßt. Zudem sind die Werte des phänomenologischen Potentials bei Kernmateriedichte und verschwindendem Impuls so gewählt, daß sie das Kompressionsmodul von Kernmaterie und die Symmetrisierungsenergie richtig wiedergeben.

Die somit berechnete Teilchen-Loch Kraft zeigt bei nuklearer Sättigungsdichte ein leicht repulsives Verhalten, wird aber mit zunehmendem Radius und damit abnehmender Dichte zunehmend attraktiver in Übereinstimmung mit anderen Rechnungen [59]. An der Oberfläche, die für Kohlenstoff bei etwa 4 fm liegt, ist die Wechselwirkung im skalaren Kanal stark wechselwirkend, so daß sich kollektive Effekte ausbilden können.

Die in unserem Modell berechnete Kraft zeigt zunächst dasselbe Verhalten. Bei Sättigungsdichte im Inneren des Kerns ist diese leicht repulsiv und wechselt dann ihr Vorzeichen und wird attraktiv. Der repulsive Anteil, der durch die Kopplungen des ω -Mesons an die Teilchen-Loch Anregungen erzeugt wird, bewirkt, daß die Teilchen-Loch Kraft an der Kernoberfläche nicht so attraktiv wird. Ab einem Radius $r \approx 3$ fm zeigt diese ein nahezu konstantes Verhalten und ist an der Oberfläche etwa um einen Faktor 3 gegenüber dem phänomenologischen Potential unterdrückt.

Betrachtet man das phänomenologische Potential bei einem endlichen Dreierimpuls von $p = 250$ MeV erkennt man eine deutliche Unterdrückung der Attraktivität, die bei verschwindendem Dreierimpuls vorhanden ist. Dies resultiert aus dem gewählten Formfaktor, der bei diesem Wert des Impulses einen Wert von 0.5 besitzt und somit die Teilchen-Loch Stärke unterdrückt. In unserem Modell ist die Abhängigkeit von einem endlichen Dreierimpuls nicht so stark ausgeprägt.

Nachdem nun die fehlenden Parameter bestimmt sind, lässt sich mittels Gl.(5.33) zunächst die skalare Wechselwirkung und damit die longitudinale Antwort berechnen. In Abb. 5.6 sieht man den Verlauf der Antwortfunktion als Funktion der Energie. Für den isovektoriellen Anteil haben wir dasselbe phänomenologische Potential benutzt wie in [56] und nur im isoskalaren Kanal die Stärke V_{ph}^{00} durch den in Gl.(5.33) angegebenen Ausdruck ersetzt.

Für zwei Kerne ^{12}C und ^{40}Ca sieht man für je zwei Impulse den Verlauf der longitudinalen

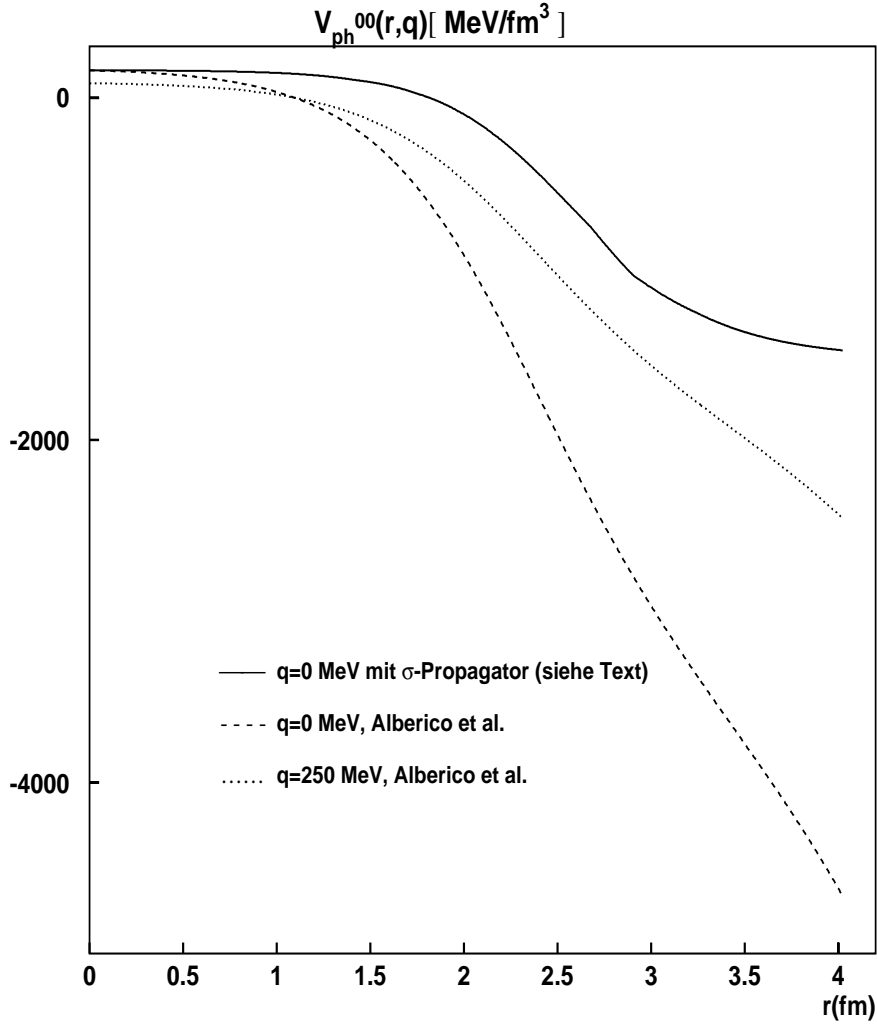


Abbildung 5.5: Die Teilchen-Loch Wechselwirkung im isoskalaren Kanal für ^{12}C . Zum Vergleich sieht man die Stärke im Rahmen eines phänomenologischen Modells und unserer mikroskopischen Beschreibung. Die gepunktete und gestrichelte Kurve zeigen die Wechselwirkung im phänomenologischen Modell für zwei Impulse. Deutlich ist die starke Attraktivität an der Oberfläche bei geringer Dichte zu erkennen. Die durchgezogene Kurve zeigt die im Rahmen unseres Modells gewonnene Wechselwirkung. Die Attraktivität an der Oberfläche ist hier deutlich unterdrückt und gewährleistet die Stabilität des σ -Mesons. Der Wert bei Sättigungsdichte ($r=0$) wurde dabei für beide Modelle an die Eigenschaften von Kernmaterie angepaßt.

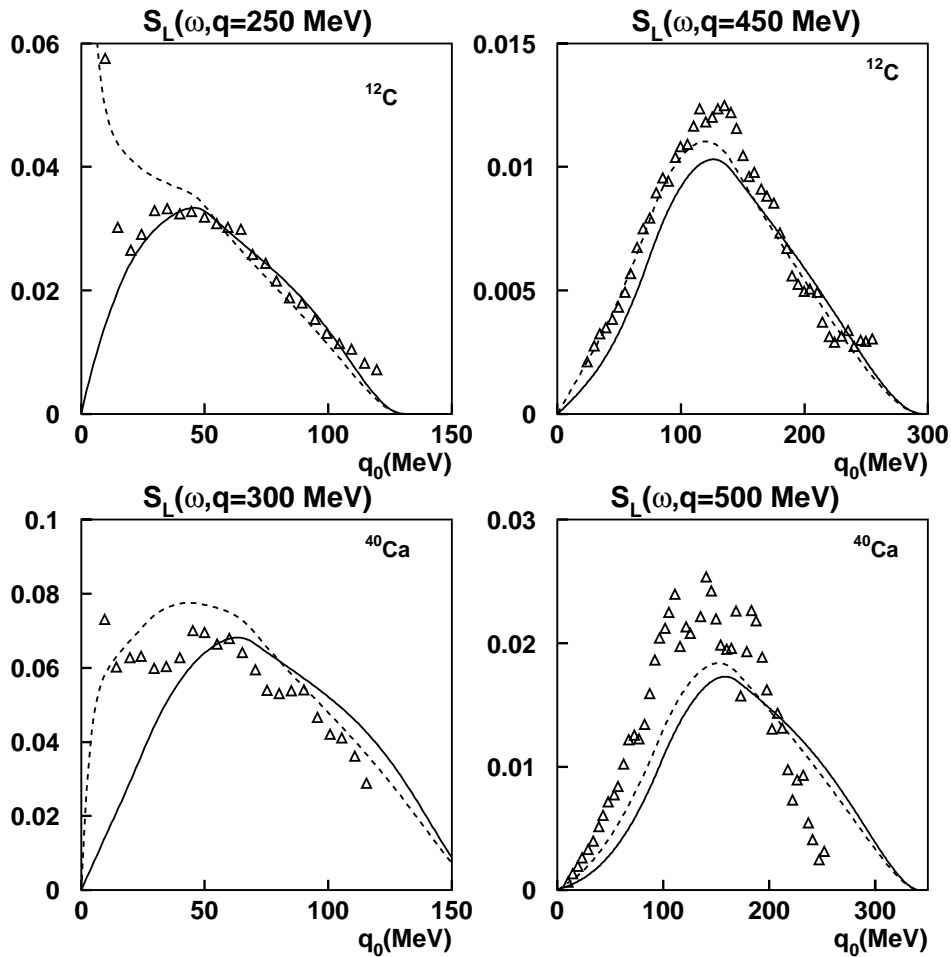


Abbildung 5.6: Die longitudinale Antwortfunktion für die Kerne ^{12}C und ^{40}Ca bei je zwei Impulsen. Die Rechnung in unserem Modell wird durch die durchgezogene Kurve repräsentiert, während die gestrichelte Kurve das Resultat der Modellrechnung von Alberico et al. ist. Für ^{12}C findet sich eine gute Übereinstimmung mit den Meßdaten im Rahmen unseres Modells. Im Fall ^{40}Ca hingegen zeigen sich deutliche Abweichungen bis zu 30 Prozent. Dies ist ein Hinweis auf die komplexere Kernstruktur von Calcium, die mit einer einfachen Teilchen-Loch Wechselwirkung nicht mehr beschrieben werden kann.

Antwortfunktion, wobei die durchgezogene Kurve immer die im Rahmen unseres Modells gewonnene Antwortfunktion beschreibt und die gestrichelte Kurve im Modell von Alberico et al. gewonnen wurde. In der oberen linken Hälfte sieht man die Antwortfunktion für Kohlenstoff bei einem Impuls von $p = 250$ MeV. Beide Kurven zeigen sehr gute Übereinstimmung mit den Daten für Energien oberhalb $\omega = 50$ MeV. Unterhalb dieser Energie sieht man jedoch deutliche Abweichungen. Während die Kurve von Alberico et al. stark ansteigt und den Anstieg der longitudinalen Antwort bei geringen Energien beschreiben kann, zeigt die im Rahmen von unserem Modell gewonnene Kurve bis zu einer Energie von etwa 20 MeV weiterhin eine sehr gute Übereinstimmung mit den Daten, fällt dann aber auf null ab ohne die Datenpunkte bei sehr geringen Energien beschreiben zu können. Der starke Anstieg im Niedrigenergiebereich in ^{12}C ist ein Zeichen für starke kollektive Effekte, die hier auftreten, ähnlich denen der Riesendipolresonanz im Anregungsspektrum von Kernen. Die in Abb. 5.6 beobachteten kollektiven Effekte sind verbunden mit der Oberfläche des Kerns und der starken Attraktion der Teilchen-Loch Kraft dort.

Wie bereits in Abb. 5.5 gesehen, ist im Gegensatz zu dem von Alberico et al. vorgeschlagenen Modell die Kraft an der Oberfläche in unserer Beschreibung deutlich geringer, was das Fehlen eines Anstiegs in dem für die Oberflächeneffekte relevanten Energiebereich erklären kann.

Bei einem höheren Impuls von $p = 450$ MeV treten diese Oberflächeneffekte nicht mehr auf und beide Modelle bieten eine zufriedenstellende Beschreibung der experimentellen Daten, wie man in der oberen rechten Bildhälfte sehen kann. Allerdings gelingt es mit beiden Beschreibungen nicht, die Meßdaten in der Nähe des Maximums zu beschreiben, und es ergeben sich Abweichungen von 10-20 Prozent.

In der unteren Bildhälfte sieht man dann die Antwortfunktion für Calcium. Beide Modelle sind nicht mehr in der Lage die Daten gut zu beschreiben, obwohl der qualitative Verlauf wiedergegeben wird. Um eine verbesserte Beschreibung der Daten zu erzielen könnte man ein realistischeres Modell für die Kernstruktur von Calcium verwenden oder zusätzlich neben den betrachteten Teilchen-Loch Anregungen auch „2-Teilchen-2-Loch“-Zustände zulassen. Dies geht jedoch über das von uns benutzte einfache Modell hinaus und ist im Rahmen dieser Arbeit nicht von Interesse.

Unser Hauptaugenmerk in diesem Abschnitt galt der Fixierung der Parameter für die Kopplung des σ -Mesons an Kernmaterie und damit der Fixierung des skalaren Propagators. Mittels der longitudinalen Antwortfunktion wurde ein Parametersatz (Gl.(5.3)) gefunden, der neben der Stabilität des σ -Mesons gegenüber Kondensation bereits bei Kernmateriedichte auch eine zufriedenstellende Beschreibung der Teilchen-Loch-Kraft im skalaren, isoskalaren Kanal gewährleistet. Im Folgenden werden wir mit diesem Parametersatz den σ -Propagator bei endlicher Dichte und Impuls berechnen.

5.4 σ -Propagator und $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix

Mit den in den vorangegangenen Abschnitten eingeführten Kopplungen des σ -Mesons an das Medium erhält man durch Anwendung von Gl.(5.23) und Gl.(5.30) für den Propagator des σ -Mesons bei endlicher Dichte insgesamt folgende Form:

$$D_\sigma(E, \vec{p}) = \left[E^2 - \vec{p}^2 - \varepsilon_\sigma^2 - f_{\sigma NN} \frac{I_N}{\langle \sigma \rangle} - f_{\sigma N^* N}^2 \Sigma_{N^* N^{-1}}(E, \vec{p}) - \frac{2\lambda^4 \langle \sigma \rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})}{1 - \lambda^2 \Sigma_{\pi\pi}(E, \vec{p})} - \frac{f_{\sigma NN}^2 \Pi^0(E, \vec{p})}{1 - (f_{\sigma NN}^2 D_\sigma^0(E, \vec{p}) - f_{\omega NN}^2 D_\omega^0(E, \vec{p}) - f_{NN}^2 F(q, \rho)) \Pi^0(E, \vec{p})} \right]^{-1}.$$

Der Propagator D_σ^0 bezeichnet dabei den Anteil ohne die Teilchen-Loch Wechselwirkungen und Π^0 ist wiederum die Lindhartfunktion, wie in Anhang D beschrieben.

Die Modifikationen des σ -Propagators bei endlicher Dichte kann man dabei sehr gut in zwei Anteile unterteilen. Bei verschwindendem Dreierimpuls trägt vor allem der sogenannte „Tadpole“-Graph in Abb. 5.2 zu einer Änderung bei. Dieser bewirkt einen dichteabhängigen Abfall der Masse des σ -Mesons. Bei endlichem Dreierimpuls und endlicher Dichte erfährt das σ -Meson dann zusätzlich Änderungen durch Kopplungen an Teilchen-Loch Anregungen. Diese Änderungen rühren zum einen von direkten Kopplungen an diesen Kanal, wie in Abb. 5.2. Zum anderen koppelt auch das Pion an Teilchen-Loch Anregungen, wodurch es zu einer Modifikation der Zwei-Pion Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ kommt, die dann wiederum in den σ -Propagator eingeht.

Neben der Berechnung des σ -Propagators bei endlicher Dichte, ist ein weiterer Fokus dieser Arbeit die Berechnung der $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix. Im Vakuum ist diese gegeben durch eine Wardidentität, und man kann die Streumatrix direkt aus den Zweipunktfunktionen der Theorie berechnen - dem Pion- und σ -Propagator (siehe Gl.(2.41)).

Durch die eingeführten phänomenologischen Terme, wie etwa den σ - ω -Austausch, wird die chirale Symmetrie gebrochen und die Wardidentität ist eventuell nicht mehr gültig. Dennoch benutzen wir in erster Näherung für die Streumatrix im Medium, die in Gl.(2.41) benutzte Form, ersetzen dabei jedoch die Propagatoren durch die im Medium berechneten Propagatoren:

$$T_{\pi\pi}^{med}(E, \vec{p}) = \frac{D_\pi^{med-1}(E, \vec{p}) - D_\sigma^{med-1}(E, \vec{p})}{\langle \sigma \rangle^2} \frac{D_\sigma^{med}(E, \vec{p})}{D_\pi^{med}(E, \vec{p})}. \quad (5.35)$$

Diese Beschreibung stellt sicher, daß im Grenzfall verschwindender Dichten die Streumatrix die im Vakuum berechnete Form annimmt.

Nachdem nun σ -Propagator und Streumatrix bestimmt sind, wollen wir einen Blick auf die Ergebnisse bei endlicher Dichte werfen.

5.4.1 Ergebnisse für $\vec{p} = 0$

Zunächst betrachten wir den Fall mit verschwindendem Dreierimpuls. In diesem Fall tragen ein Teil der beschriebenen Medieffekte keine Rolle, da sowohl der Anteil aus dem

σ - ω Austausch verschwindet, als auch die Teilchen-Loch Kopplungen des σ -Mesons verschwinden. Der σ -Propagator und die $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix bei verschwindendem Dreierimpuls sind für verschiedene Dichten in Abb. 5.7 gezeigt. In der oberen Hälfte sind dabei Real- und Imaginärteil des σ -Propagators für Dichten $\rho = \rho_0$, $\rho = 0.5\rho_0$ und $\rho = 0$ abgebildet. Im Realteil des Propagators kann man mehrere Effekte sehen: Die Strukturen sind bei endlicher Dichte deutlich ausgeprägter als im Vakuum. Der Übergang vom Minimum zum Maximum, der im Vakuum über mehrere hundert MeV vonstatten geht, vollzieht sich bei Kernmateriedichte innerhalb weniger MeV. Dabei bleibt die Position des Minimums allerdings unverändert während das Maximum, und damit auch der Nulldurchgang, zu kleineren Energien verschoben werden. Dies führt dazu, daß die Masse, die im Vakuum bei 535 MeV liegt, bei halber Kernmateriedichte auf 370 MeV fällt und bei Kernmateriedichte den Wert 295 MeV einnimmt. Die Massenabnahme bei endlicher Dichte ist dabei auf zwei Ursachen zurückzuführen. Zum einen sorgt der in Abb. 5.3 gezeigte „Tadpole“-Graph für eine Massenabnahme von 30 Prozent bei Kernmateriedichte. Zum anderen bewirkt die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$ durch die Modifikationen des Pions bei endlicher Dichte ebenso eine Verschiebung der Masse zu niedrigeren Energien. Dieser Abfall ist in Übereinstimmung mit der zugrundeliegenden chiralen Symmetrie, bei deren Wiederherstellung erwartet wird, daß die Massen von Pion und σ -Meson entarten.

Im Imaginärteil des Propagators äußert sich diese teilweise Wiederherstellung der chiralen Symmetrie und der damit verbundene Abfall der Masse des σ -Mesons durch eine Verschiebung des Maximums der Verteilung von einer Energie von 450 MeV hin zu einer Energie von 280 MeV. Gleichzeitig mit dieser Verschiebung verliert die Verteilung mit steigender Dichte deutlich an Breite. Die Halbwertsbreite, die im Vakuum einen Wert $\Gamma = 390$ MeV besitzt, ist bei Kernmateriedichte auf einen Wert $\Gamma = 80$ MeV abgefallen. Dieser Abfall lässt sich mit der reduzierten Masse des σ -Mesons in Materie folgendermaßen erklären: Hauptbeitrag zum Imaginärteil liefert die Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$, die den Zerfall eines σ -Mesons in zwei Pionen beschreibt. Bei Kernmateriedichte ist die Masse auf etwa 300 MeV abgefallen, eine Energie die knapp über der Produktionsschwelle für zwei Pionen liegt, und damit ist der zur Verfügung stehende Phasenraum für den Zerfall deutlich geringer. Damit verringert sich auch die Breite, die ein Maß für die mittlere Lebenszeit und Stabilität des σ -Mesons ist. Ein weiterer Punkt ist, daß das Maximum der Verteilung deutlich stärker ausgeprägt ist, und man bei Kernmateriedichte eine Erhöhung von 400 Prozent gegenüber dem Vakuum feststellen kann. Dieser Zugewinn an Stärke in Schwellennähe ist eine wichtige Eigenschaft unseres Modells und ist in Übereinstimmung mit experimentellen Erkenntnissen, wie wir in Abschnitt 6.1-6.5 noch genauer untersuchen wollen [9],[10],[11].

Der Realteil der Streumatrix $T_{\pi\pi}$, der in der unteren linken Bildhälfte zu sehen ist, zeigt mit steigender Dichte vor allem Änderungen im mittleren Energiebereich zwischen 300 und 600 MeV. Bei Kernmaterie hat sich bei der Masse des σ -Mesons ein scharfes Minimum ausgebildet im Gegensatz zu dem sehr breiten Minimum im Vakuum. Bei kleinen Energien bleibt die Streumatrix repulsiv, was die Stabilität des σ -Mesons gewährleistet und eine Folge der chiralen Symmetrie ist, die unserem Modell zugrundeliegt.

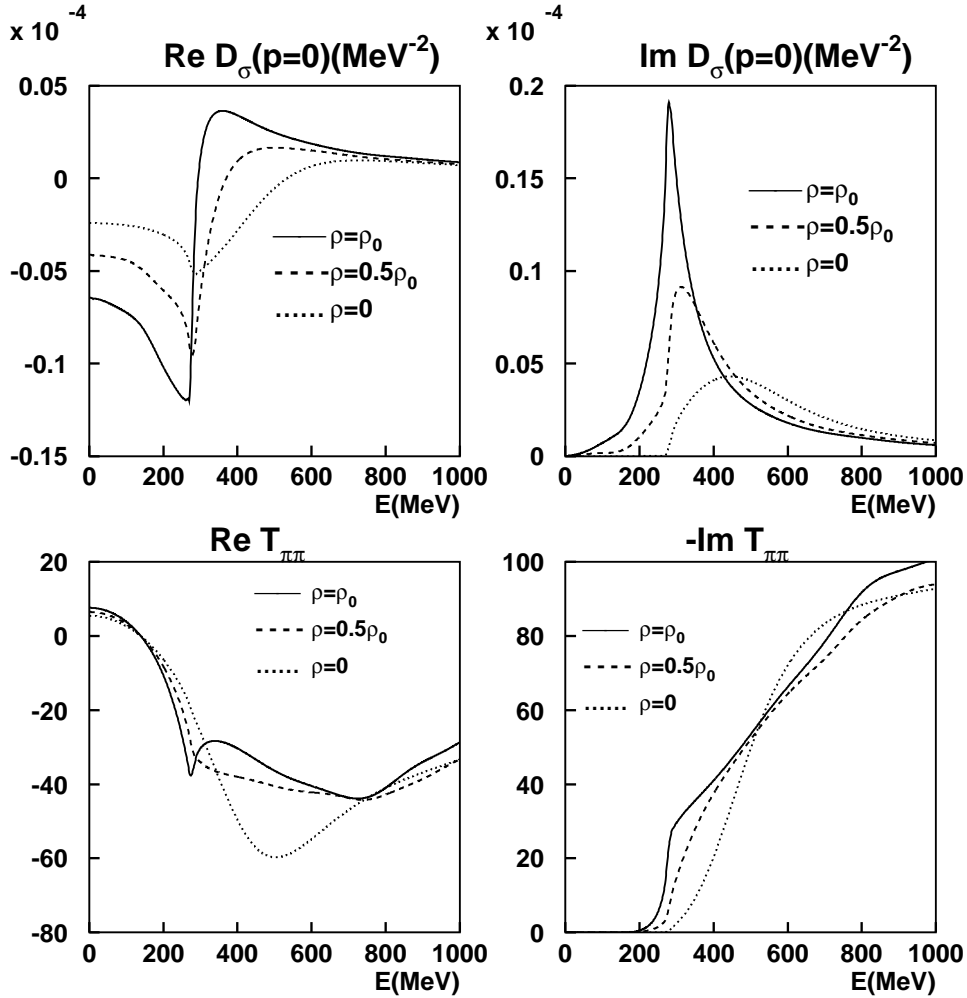


Abbildung 5.7: In der oberen Bildhälfte sieht man Real- und Imaginärteil des σ -Propagators für verschiedene Dichten. Deutlich kann man erkennen, daß mit steigender Dichte die Masse zu kleineren Energien verschoben ist. Gleichzeitig sieht man im Imaginärteil einen deutlichen Anstieg der Stärke in Schwellennähe, sowie eine Abnahme der Breite. In der unteren Hälfte sieht man Real- und Imaginärteil der $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix. Der Realteil der Streumatrix bei kleinen Energien bleibt für Dichten bis zur Kernmateriedichte repulsiv, was eine Forderung der chiralen Symmetrie ist und die Stabilität des σ -Mesons garantiert. Der Imaginärteil zeigt mit steigender Dichte eine Akkumulation von Stärke an der Produktionsschwelle für zwei Pionen, als Folge des modifizierten σ -Propagators.

Im Imaginärteil sieht man mit zunehmender Dichte eine Verschiebung hin zu kleineren Energien. Bei Sättigungsdichte zeigt sich in der Nähe der Schwelle für die Produktion von zwei Pionen ein sehr starker Anstieg im Imaginärteil der Streumatrix, die von dem starken Anstieg im Imaginärteil des Propagators bei Sättigungsdichte herrührt. Zusätzlich sieht man mit endlicher Dichte das Auftreten von Beiträgen in der Streumatrix unterhalb der Schwelle für die Produktion von zwei Pionen. Dieser Anteil stammt aus der Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$, wie in Abb. 5.4 dargestellt.

5.4.2 Ergebnisse für endliche Impulse $\vec{p} \neq 0$

Im vorigen Abschnitt haben wir den Propagator des σ -Mesons und die Streumatrix bei endlicher Dichte und verschwindendem Impuls berechnet. Dabei werden die Kopplungen an Teilchen-Loch Anregungen und die bei endlichem Impuls modifizierte Pionschleife $\Sigma_{\pi\pi}$ vernachlässigt. Die durch den endlichen Impuls hervorgerufenen Änderungen des Propagators und der Streumatrix wollen wir daher nun näher untersuchen: Nach Gl.(5.35) und Gl.(5.37) haben wir den Propagator des σ -Mesons und die $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix für Kernmateriedichte berechnet und das Ergebnis für drei verschiedene Impulse in Abb. 5.8 dargestellt. Dabei wurde als Dichte Kernmateriedichte gewählt, da dort die Effekte am deutlichsten ausgeprägt sind. In der oberen Bildhälfte sieht man den σ -Propagator als Funktion der invarianten Masse $M_{\pi\pi} = \sqrt{E^2 - \vec{p}^2}$. Diese Wahl der Variable eliminiert die triviale Verschiebung in Abhängigkeit der Energie, die durch das Vorhandensein des endlichen Dreierimpuls herrührt. Dazu kommt, daß man für Energien kleiner als der Impuls in den unphysikalischen raumartigen Bereich gelangt und dieser Bereich nicht auftritt, wenn man den Propagator als Funktion der invarianten Masse untersucht.

Im Realteil des Propagators, der in der oberen linken Hälfte zu sehen ist, sieht man mit steigendem Impuls zunächst eine Verschiebung der „Masse“ des σ -Mesons hin zu einer höheren invarianten Masse. Bei einem Impuls $|\vec{p}| = 200$ MeV beträgt diese Verschiebung etwa 20 Prozent. Einhergehend mit dieser Verschiebung sieht man eine deutliche Verbreiterung im Realteil in der Nähe der Nullstelle. Für große invariante Massen $M_{\pi\pi} > 4m_\pi$ hingegen geht der Realteil bei endlichem Impuls in den Realteil mit $|\vec{p}| = 0$ über.

In der oberen rechten Hälfte ist der Imaginärteil des σ -Propagators dargestellt. Als Folge der verschobenen Masse des σ -Mesons sieht man auch eine leichte Verschiebung des Maximums im Imaginärteil. Zudem ist die relative Stärke des Maximums gegenüber dem Fall $|\vec{p}| = 0$ stark reduziert. Bei einem Impuls von $|\vec{p}| = 100$ MeV ist diese bereits um etwa 30 Prozent abgefallen und bei $|\vec{p}| = 200$ MeV um knapp 60 Prozent. Bei endlichem Impuls sieht man zudem eine Verbreiterung des Imaginärteils. Durch das Auftreten neuer Zerfallskanäle steigt die Halbwertsbreite bei einem Impuls von 200 MeV auf über 200 MeV. Bei verschwindendem Impuls beträgt diese nur 80 MeV. Schließlich sieht man eine deutliche Ansammlung von Stärke bei verschwindender invarianter Masse als Folge der Kopplungen an Teilchen-Loch Anregungen. Diese Stärke setzt sich im raumartigen Bereich fort, wie wir bereits in vorherigen Kapitel diskutiert haben. Für hohe invariante

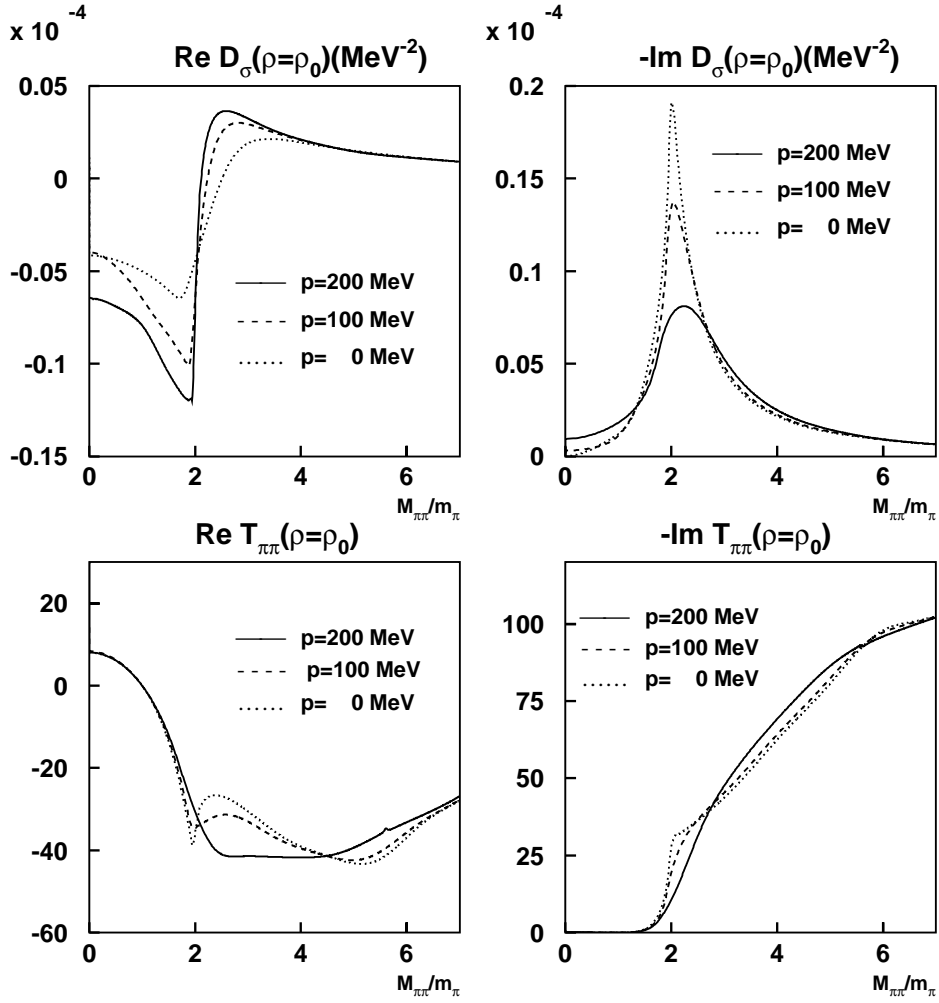


Abbildung 5.8: σ -Propagator D_σ und Streumatrix $T_{\pi\pi}$ bei endlicher Dichte und Impuls. Man kann mit zunehmendem Impuls eine starke Unterdrückung von Stärke im Imaginärteil des Propagators und der Streumatrix an der Zwei-Pion-Schwelle beobachten (rechtes oberes und rechtes unteres Bild). Damit einhergehend ist eine Verschiebung der Nullstelle des Realteils des Propagators zu höheren invarianten Massen (links oben).

Massen $M_{\pi\pi} > 4m_\pi$ gehen die Kurven mit endlichem Dreierimpuls wieder in die mit verschwindendem Impuls über. Insgesamt wird deutlich, daß bei Vorhandensein eines endlichen Dreierimpuls ein Teil der Effekte aus der teilweisen Wiederherstellung der chiralen Symmetrie, wie etwa die Abnahme der Masse und Breite des σ -Mesons, wieder abgeschwächt wird.

Die Streumatrix $T_{\pi\pi}$ ist für drei verschiedene Impulse als Funktion der invarianten Masse im unteren Teil der Abbildung dargestellt. Die Impulsabhängigkeit des Realteils, die in der unteren linken Bildhälfte zu sehen ist, zeigt sich hauptsächlich bei invarianten Massen um 300 MeV. Das stark ausgeprägte Minimum an der Masse des σ -Mesons verschwindet dabei mit zunehmendem Impuls. Die Repulsivität der Streumatrix bei verschwindender invarianter Masse bleibt allerdings erhalten. Dies ist Folge des repulsiven Anteils durch ω -Meson und Nukleon-Nukleon Kopplungen, die wir aus Stabilitätsgründen im vorangehenden Abschnitt eingefügt hatten.

Im Imaginärteil der Streumatrix sieht man mit steigendem Impuls eine Umkehrung des Effektes, der durch die endliche Dichte hervorgerufen wurde: Die Stärke, die sich bei Kernmateriedichte und verschwindendem Dreierimpuls an der Zwei-Pionschwelle angesammelt hatte, wird zu größeren invarianten Massen hin verschoben. Zudem verschwindet das Maximum, das sich dabei ausgebildet hatte.

Durch den endlichen Dreierimpuls erfahren sowohl der Propagator als auch die Streumatrix sehr starke Änderungen vor allem im invarianten Massenbereich um die Masse des σ -Mesons herum. Diese negieren teilweise die im vorigen Abschnitt diskutierten Effekte der Massenänderung des σ -Mesons als Folge des Tadpolegraphen und der im Medium stark modifizierten Selbstenergie $\Sigma_{\pi\pi}$.

Wichtig jedoch ist zu bemerken, daß das σ -Meson im Rahmen unseres Modells bei den untersuchten Dichten bis Kernmateriedichte und Impulsen bis 500 MeV/c stabil bleibt. Diese Stabilität im Medium wird bei endlichem Impuls durch die Hinzunahme des repulsiven σ - ω -Austauschs gewährleistet, wie im vorigen Abschnitt besprochen.

Kapitel 6

Die $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Experiment

Eine wichtige Erkenntnis aus der Untersuchung des σ -Mesons in dichter Materie ist der starke Abfall in der Masse und die damit verbundene Abnahme der Breite des σ -Mesons in der Nähe der Zwei-Pion-Schwelle. Diese Effekte sind direkte Folge der teilweisen Wiederherstellung der chiralen Symmetrie, die die Entartung der Massen von σ -Meson und Pion fordert.

Um diesen Effekt nachzuweisen, liegt es daher nahe die Produktion von zwei Pionen in Kernen in der Nähe der Schwelle zu untersuchen. Dabei muß zudem gewährleistet sein, daß das produzierte Pionpaar im skalaren isoskalaren Kanal vorliegt, also genau die Quantenzahlen des σ -Mesons aufweist.

Mehrere Experimente sind bezüglich dieser Fragestellung durchgeführt worden und zwei davon werden wir im Folgenden genauer untersuchen: Zum einen das von der CHAOS Kollaboration [9] am TRIUMF durchgeführte „Pion-Produktions“-Experiment, in der mit einem Strahl von π^+ verschiedene Kerne beschossen wurden und zwei geladene Pionen im Endzustand gemessen wurden.

Zum anderen das von der TAPS Kollaboration [10] gemessene Photoproduktionsexperiment am Elektronenbeschleuniger MAMI. Dieses hat mit einem Photonstrahl die Kerne 1H , ^{12}C und ^{208}Pb untersucht und zwei neutrale Pionen im Ausgangszustand über ihren Zerfall in vier Photonen gemessen.

Dabei ist in beiden Experimenten eine dichteabhängige Modifikation des differentiellen Wirkungsquerschnittes gemessen worden.

Eine mögliche Interpretation dieser Messungen ist, die Dichteabhängigkeit auf die Modifikation der Pionen im Medium zurückzuführen und somit als ein Anzeichen für die teilweise Wiederherstellung der chiralen Symmetrie zu werten.

Wir werden zunächst die Experimente vorstellen und dann eine theoretische Beschreibung der Experimente angehen.

Ein wichtiger Bestandteil wird dabei die Streumatrix $T_{\pi\pi}$ sein, die wir im vorigen Abschnitt bei endlicher Dichte berechnet haben. Diese ist ein Maß für die Stärke der $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Medium, und wir werden ihren Einfluß auf die theoretisch berechneten Wirkungsquerschnitte untersuchen.

6.1 Die $A(\pi, \pi\pi)$ Reaktion

Im Rahmen des $A(\pi, \pi\pi)$ [9] Experiments wurden die Kerne 2H , ^{12}C , ^{40}Ca und ^{208}Pb mit positiv geladenen Pionen mit der kinetischen Energie $T_{\pi^+} \approx 282.7$ MeV beschossen und die invariante Massenverteilung $M_{\pi^+\pi^\pm}$ des dabei entstehenden Pionenpaares bis hinab zur $2m_\pi$ -Schwelle gemessen.

Ziel dieses Experimentes war die Untersuchung der $\pi\pi$ -Wechselwirkung und Modifikationen dieser in dichter Materie. Mit dem verwendeten π^+ -Strahl und dem TRIUMF Detektor sind prinzipiell zwei elementare Reaktionen möglich :

$$\begin{aligned}\pi^+ p &\rightarrow \pi^+ \pi^+ n \\ \pi^+ n &\rightarrow \pi^+ \pi^- p\end{aligned}$$

Beide Reaktionskanäle sind simultan bei den verwendeten Targetkerne gemessen worden. Die Geometrie des verwendeten Detektors ist derart, daß für Winkel größer als $\pm 9^\circ$ um den eingehenden Strahl in der Reaktionsebene keine Daten aufgenommen werden können. Zudem sind die Messungen außerhalb der Reaktionsebene auf den Bereich zwischen 7° und -7° beschränkt. Die Detektorakzeptanz in der Reaktionsebene wurde allerdings bei der Auswertung der Daten in Betracht gezogen und die Daten mittels der GEANT Monte-Carlo Methode korrigiert. Für die beschränkte Akzeptanz außerhalb der Reaktionsebene wurden keine Korrekturen vorgenommen. Die gemessenen invarianten Masseverteilungen für die untersuchten Kerne sind in Abb. 6.1 gezeigt.

Im $(\pi^+, \pi^+\pi^-)$ -Reaktionskanal (oberes Bild) sieht man einen deutlichen Zuwachs in der Massenverteilung in der Nähe der Schwelle mit steigender Massenzahl A des Kerns. Die gleichzeitige Verbreiterung mit steigender Massenzahl ist dabei Folge des vergrößerten Phasenraums für das produzierte Pionenpaar.

Im Gegensatz dazu zeigt die $M_{\pi^+\pi^+}$ -Verteilung (unteres Bild) in der Nähe der Schwelle keine Abhängigkeit von der Massenzahl. Bis auf die Verbreiterung, die hier zusätzlich durch die Coulomb Wechselwirkung eintritt, lässt sich in diesem Reaktionskanal keine Dichteabhängigkeit nachweisen. Die durchgezogene Kurve, die man in beiden Bildern für Deuterium sieht, ist eine theoretische Rechnung von Oset [60], die die Detektorakzeptanz von CHAOS mitberücksichtigt. Diese Rechnung erlaubt eine gute Beschreibung der am 2H Kern gemessenen Daten, kann jedoch den für die massiveren Kerne gemessenen Anstieg nicht erklären.

Zusätzlich zu den invarianten Massenverteilungen wurden die Winkelverteilungen des Pionenpaares gemessen. Beide untersuchten Reaktionskanäle zeigen in Schwellennähe ($2m_\pi \leq M_{\pi\pi} \leq 315$ MeV) ein flaches Verhalten und liegen daher in s-Welle vor. Dieses Verhalten ist in Abb. 6.2 gezeigt. Man sieht dort für die Energiebereiche $2m_\pi \leq M_{\pi\pi} \leq 310$ MeV und 310 MeV $\leq M_{\pi\pi} \leq 420$ MeV die Wirkungsquerschnitte als Funktion des Winkels. Bei höheren Energien erkennt man einen Anstieg der Daten mit dem Winkel und damit einen stärker werdenden Einfluß von höheren Partialwellen. In Schwellennähe jedoch handelt es sich vorwiegend um ein Pionpaar in s-Welle. Die genaue Zerlegung in die einzelnen Partialwellen für den Schwellenbereich ist in Tab.6.1 dargestellt [61]. Neben dem dominanten

Fig. 1

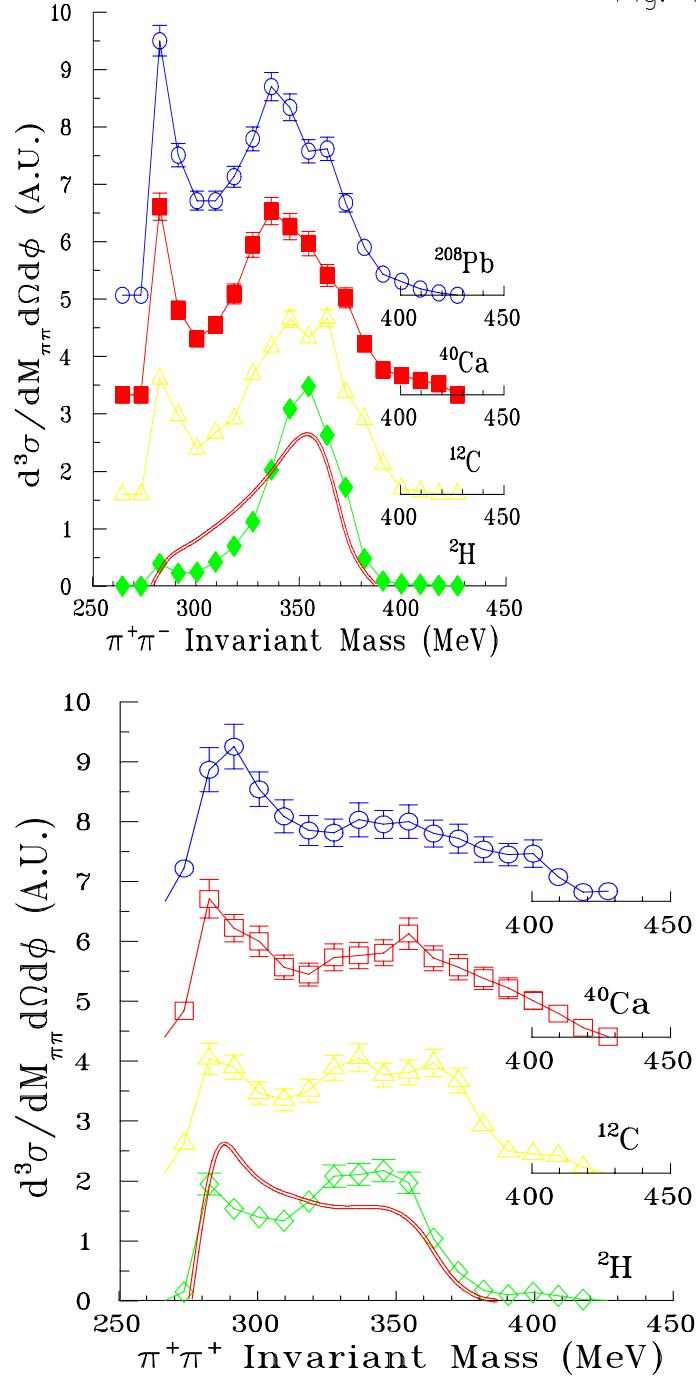


Abbildung 6.1: $M_{\pi^+\pi^-}$ -Verteilung für die verschiedenen Targetkerne [9]. Deutlich sieht man den Anstieg an der Schwelle mit steigender Massenzahl (oben). Für die $M_{\pi^+\pi^+}$ -Verteilung sieht man keine signifikanten Änderung mit steigender Massenzahl (unten). Die doppelt durchgezogenen Kurven entsprechen einer Modellrechnung von Oset [60].

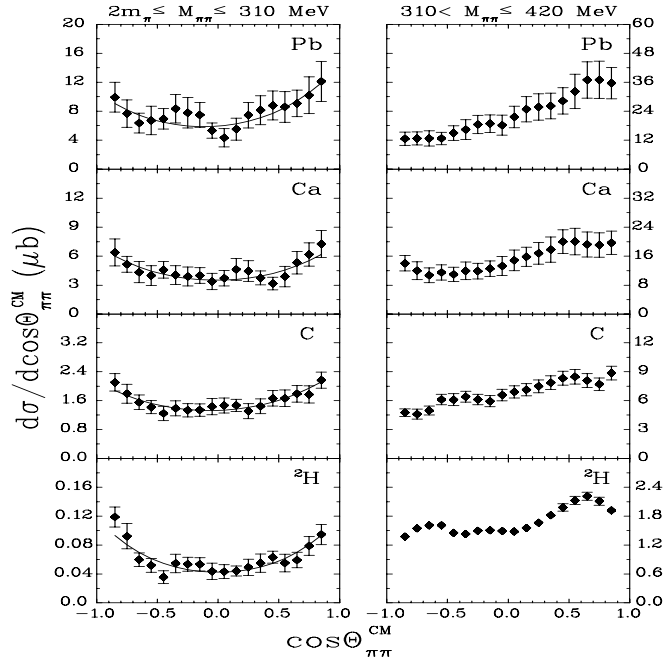


Abbildung 6.2: *Partialwellen Zerlegung der Meßdaten [61]. Die Verteilungen sind bei den betrachteten Energien nahezu konstant bei allen 4 betrachteten Kernen. Erst bei höheren Energien sieht man eine zunehmende Winkelabhängigkeit auftreten.*

s-Wellen Anteil sieht man Beimischung von d-Wellen. Höhere Partialwellen und p-Wellen treten in diesem Energiefenster nicht auf (bis auf einen geringen Anteil p-Welle in ^{208}Pb).

Kern	s-Welle (%)	p-Welle (%)	d-Welle (%)
^2H	88.2	0.0	11.8
^{12}C	96.0	0.0	4.0
^{40}Ca	93.9	0.0	6.1
^{208}Pb	93.9	0.8	5.3

Tabelle 6.1: *Zerlegung der invarianten Masseverteilung in die Partialwellen [61]*

Aufgrund der Isospin-Algebra kann das $\pi^+\pi^+$ Paar nur im $J=0, I=2$ Zustand vorliegen, also insbesondere nicht die Quantenzahlen des σ -Mesons annehmen. Die Isospin-Algebra erlaubt die Kopplung des $\pi^+\pi^-$ Paar zu Zuständen mit $J=0, I=0,1,2$, allerdings ist der

Zustand mit $I=1$ aufgrund der Forderung nach einer symmetrischen Wellenfunktion für das $\pi\pi$ -System verboten. Darüber hinaus ist der Zustand mit $I=2$ bei den im Experiment betrachteten Energien vernachlässigbar, so daß das $\pi^+\pi^-$ Paar fast ausschließlich in den Quantenzahlen des σ -Mesons vorkommt. Der Anstieg, den man in den invarianten Massenverteilungen an der Schwelle erkennen kann, ist also verbunden mit dem Kanal, in dem die Pionen mit den Quantenzahlen des σ -Mesons vorliegen und abwesend im anderen Kanal. Dies wirft die Frage auf, inwieweit Modifikationen des $\pi\pi_{I=J=0}$ -Systems in endlicher Dichte für den starken, dichteabhängigen Effekt in der invarianten Massenverteilung verantwortlich sind. Um diese Fragestellung beantworten zu können, bedienen wir uns im Folgenden der Reaktionstheorie von Oset und Rockmoore für die $A(\pi, 2\pi)$ Reaktion [62],[63].

6.1.1 Reaktionstheorie

Eine theoretische Beschreibung der $A(\pi, 2\pi)$ Reaktion ist in der Vergangenheit bereits von den oben genannten Autoren angestrengt worden. Dabei bedienten sie sich der Eikonal-Näherung und verwendeten für den Kern ein Fermi-Gas Modell. Darüber hinaus liefert das Modell von Oset einen phänomenologischen Ansatz zur Beschreibung der Absorption der ein- und auslaufenden Pionen, der in dem untersuchten Energiebereich zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Aufgrund der starken Wechselwirkung der Pionen mit der umgebenden Materie spielt die Absorption und Verzerrung der Pionen eine wichtige Rolle bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes.

Neben diesen durch die Anwesenheit des Kerns hervorgerufenen Effekten ist die T-Matrix für den elementaren Prozeß $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ zentraler Bestandteil der Reaktionstheorie. Es gibt eine Vielzahl von Zugängen zur Berechnung der Reaktionsamplituden für die zugrundeliegende $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ Reaktion, die eine erfolgreiche Beschreibung des totalen Wirkungsquerschnittes erzielen, dabei aber meist, teilweise deutliche, Abweichungen vom Experiment in den differentiellen Wirkungsquerschnitten zeigen [64]-[67]. Wir werden im Rahmen dieser Arbeit Jensen und Miranda folgen [68], die im Rahmen eines effektiven chiralen Modells unter der Hinzunahme von höheren nukleonischen Resonanzen den elementaren Prozeß berechnet haben.

Zusammengefasst erhält man für die Berechnung des Wirkungsquerschnittes:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\pi}{q} \int d^2b dz A_{in}(\rho(\vec{r})) A_{out}^+(\rho(\vec{r}_1)) A_{out}^-(\rho(\vec{r}_2)) \\ &\quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3q_2}{(2\pi)^3} n(\vec{k}) [1 - n(\vec{q} + \vec{q} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2)] \\ &\quad \delta(q_0 + \varepsilon_{\vec{k}} - \omega_{\vec{q}_1} - \omega_{\vec{q}_2} - \varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}-\vec{q}_1-\vec{q}_2}) \frac{1}{2\omega_{\vec{q}_1}} \frac{1}{2\omega_{\vec{q}_2}} \\ &\quad |T_{(\pi N \rightarrow \pi\pi N)}|^2 \times \text{Detektorakzeptanz}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

wobei A_{in} und A_{out}^\pm die Absorption der ein- und ausgehenden Pionen beschreiben. Daneben treten in diesem Integral eine 4-dimensionale Deltafunktion auf, die die Energie- und

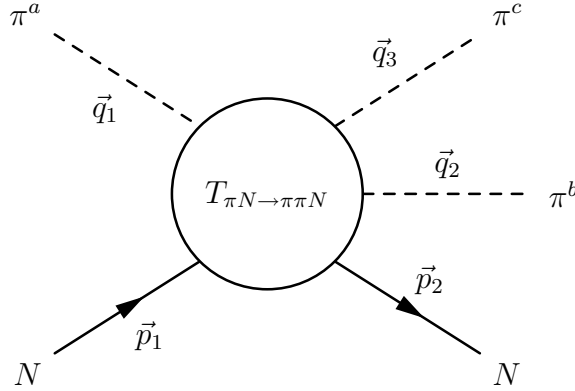


Abbildung 6.3: Darstellung der Pionproduktion im Experiment $\pi N \rightarrow \pi\pi N$.

Impulserhaltung sicherstellt, sowie Besetzungszahlen für die Nukleonen, die als Fermionen das Pauliprinzip erfüllen müssen. Die Variablen b und z bezeichnen die Position des streuenden Nukleons, b ist dabei der Stoßparameter und z die Höhe.

Zur Berechnung dieses mehrdimensionalen Integrals verwenden wir die Monte-Carlo Methode, in der wir zunächst Position und Impuls des mit dem Pion wechselwirkenden Nukleons ermitteln, und dann mit dem GENBOD Phasenraumprogramm die Impulse der auslaufenden Pionen und des Nukleons berechnen. Dies erlaubt uns auch die Geometrie des Detektors zu simulieren, indem wir nur Ereignisse berücksichtigen, in denen die ausgehenden Pionen maximal um 7° aus der Reaktionsebene abgelenkt sind.

Bevor wir jedoch die Ergebnisse für den Wirkungsquerschnitt diskutieren, stellen wir die T-Matrix für den elementaren Prozeß vor.

Die Elementaramplitude $\pi N \rightarrow \pi\pi N$

Für den elementaren Prozeß $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ - siehe Abb. 6.3 - folgen wir, wie bereits im vorigen Abschnitt besprochen, einer Arbeit von Jensen und Miranda, die die Reaktion mithilfe der chiralen Störungstheorie unter Berücksichtigung von schweren Baryonen ($B\chi PT$) beschreiben. Dabei wurden neben dem Nukleon zusätzlich die $\Delta(1232)$ - und die $N^*(1440)$ Nukleonresonanzen berücksichtigt. Der Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte in diesem Modell ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\pi\pi\pi\pi} + \mathcal{L}_{NN\pi} + \mathcal{L}_{NN\pi\pi} + \mathcal{L}_{NN\pi\pi\pi} + \mathcal{L}_{N\Delta\pi} + \mathcal{L}_{NN^*\pi} + \mathcal{L}_{NN^*\pi\pi}$$

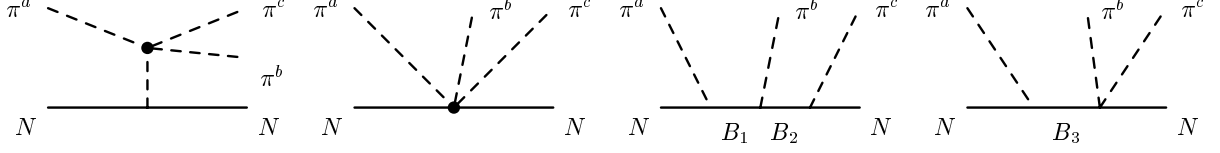


Abbildung 6.4: Die Feynman-Graphen in Baumgraphennäherung zur Berechnung der elementaren T-Matrix

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}\tilde{\pi}\tilde{\pi}} &= \frac{1}{8f_\pi^2}[(\partial\tilde{\pi}^2)^2 - m_\pi^2\tilde{\pi}^4] \\
\mathcal{L}_{NN\tilde{\pi}} &= -\frac{g_A}{2f_\pi}\bar{N}\gamma^\mu\gamma^5\tau\cdot\partial_\mu\tilde{\pi}N \\
\mathcal{L}_{NN\tilde{\pi}\tilde{\pi}} &= -\frac{1}{4f_\pi^2}\bar{N}\gamma^\mu\tau\cdot(\tilde{\pi}\times\partial_\mu\tilde{\pi})N \\
\mathcal{L}_{NN\tilde{\pi}\tilde{\pi}\tilde{\pi}} &= -\frac{g_A}{8f_\pi^3}\bar{N}\gamma^\mu\gamma^5\tau\cdot\tilde{\pi}\partial_\mu\tilde{\pi}^2N \\
\mathcal{L}_{N\Delta\tilde{\pi}} &= -\frac{g_\Delta}{2f_\pi}\bar{\Delta}_\mu T^a g^{\mu\nu}\partial_\nu\tilde{\pi}^aN + H.c. \\
\mathcal{L}_{NN^*\tilde{\pi}} &= -\frac{g_{N^*}}{2f_\pi}\bar{N}^*\tau\cdot\partial_\mu\tilde{\pi}\gamma^\mu\gamma^5N + H.c. \\
\mathcal{L}_{NN^*\tilde{\pi}\tilde{\pi}} &= -\frac{1}{f_\pi^2}\bar{N}^*[-C_1m_\pi^2\tilde{\pi}^2 + C_3(\partial_\mu\tilde{\pi})^2]N + H.c. .
\end{aligned}$$

Die berücksichtigten Diagramme in Baumgraphennäherung sind in Abb. 6.4 gezeigt. Im dritten und vierten Graph tauchen Baryon-Propagatoren auf, die je nach Prozeß ein Nukleon oder eine Resonanz bezeichnen. Bei dem Paar (B1,B2) kann es sich dabei um (N,N),(N, Δ) und (Δ ,N) Propagatoren handeln, während B3 entweder für ein Nukleon oder eine $N^*(1440)$ -Resonanz steht.

Zur Berechnung der T-Matrix für diese Reaktion kann man zunächst ausnutzen, daß die T-Matrix in einer einfachen Form für die Isospinabhängigkeit dargestellt werden kann:

$$T^{abc} = \bar{u}(p_2) [F_1 i\varepsilon^{abc} + F_2 \delta^{ab}\tau^c + F_3 \delta^{ac}\tau^b + F_4 \delta^{bc}\tau^a] \gamma_5 u(p_1) . \quad (6.2)$$

Es gibt insgesamt 16 mögliche Reaktionen, 8 mit einem Proton als Target, 8 mit einem Neutron. Aufgrund der Instabilität des Neutrons lassen sich jedoch experimentell nur die Reaktionen mit einem Proton als Target messen. Zudem hat das neutrale Pion aufgrund der Adler-Bell-Jackiw Anomalie eine um 9 Größenordnungen geringere Lebensdauer und ist daher als Projektil ebenso ungeeignet, da es zerfällt bevor es auf das Target trifft.

Somit bleiben 5 Reaktionen dem Experiment zugänglich:

$$\begin{aligned}
1. & \pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ n \\
2. & \pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^0 p \\
3. & \pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n \\
4. & \pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n \\
5. & \pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^- p.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Indem man die Isospinalggebra auf die einzelnen Reaktionen anwendet, erhält man:

$$\begin{aligned}
1. & \chi_n^\dagger (\Phi_+^*)^c (\Phi_+^*)^b (\Phi_+)^a \chi_p T^{abc} = \bar{u}(p_2) [-\sqrt{2}(F_2 + F_3)] \gamma_5 u(p_1) \\
2. & \chi_p^\dagger (\Phi_+^*)^c (\Phi_0^*)^b (\Phi_+)^a \chi_p T^{abc} = \bar{u}(p_2) [F_1 + F_2] \gamma_5 u(p_1) \\
3. & \chi_n^\dagger (\Phi_-^*)^c (\Phi_+^*)^b (\Phi_-)^a \chi_p T^{abc} = \bar{u}(p_2) [-\sqrt{2}(F_3 + F_4)] \gamma_5 u(p_1) \\
4. & \chi_n^\dagger (\Phi_0^*)^c (\Phi_0^*)^b (\Phi_-)^a \chi_p T^{abc} = \bar{u}(p_2) [\sqrt{2}F_4] \gamma_5 u(p_1) \\
5. & \chi_p^\dagger (\Phi_-^*)^c (\Phi_0^*)^b (\Phi_-)^a \chi_p T^{abc} = \bar{u}(p_2) [F_1 + F_3] \gamma_5 u(p_1).
\end{aligned}$$

Die Isospinfunktionen $F_1 - F_4$ wiederum haben eine Dirac-Struktur von folgender Form:

$$F_i = \bar{u}(p_2) [F_{i1} + F_{i2} \gamma_\mu k_2^\mu + F_{i3} \gamma_\nu k_3^\nu + F_{i4} \gamma_\mu \gamma_\nu k_3^\mu k_2^\nu] \gamma_5 u(p_1), \tag{6.4}$$

wobei \vec{k}_2 und \vec{k}_3 die Impulse der auslaufenden Pionen bezeichnen. Berechnung der Funktionen F_{ij} erlaubt dann für jede Reaktion die Bestimmung der Übergangsamplitude und damit auch die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes:

$$\begin{aligned}
\sigma = & \frac{4M_N^2}{4\sqrt{(p_1 k_1)^2 - M_n^2 m_\pi^2}} (p_1^2 + k_1^2) \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E(p_2)} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega(k_2)} \\
& \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3 2\omega(k_3)} |T_{\pi N \rightarrow \pi\pi N}|^2 (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2 - k_3).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Dabei wurde bei der Berechnung der T-Matrix über die Spins der Nukleonen gemittelt. Die somit berechneten Wirkungsquerschnitte für die experimentell zugänglichen Reaktionen zeigen im Energiebereich von $0.171 \text{ GeV} \leq T_\pi \leq 0.400 \text{ GeV}$ eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den Meßdaten [69]-[71]. Mit zunehmender Energie nimmt diese jedoch ab und Terme nächsthöherer Ordnung und höher liegende Nukleonresonanzen sind zu berücksichtigen. In Abb. 6.5 sieht man die Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen $\pi^\pm p \Rightarrow \pi^\pm \pi^\pm n$.

In Abhängigkeit von der kinetischen Energie des einlaufenden Pions sieht man dabei unter Berücksichtigung der $\Delta(1232)$ - und $N^*(1440)$ -Resonanz (durchgezogene Linie) und ohne Resonanzen (gestrichelte Linie) einen Vergleich mit dem Experiment. Die Resonanzen sind dabei für die Reaktion $\pi^- p \Rightarrow \pi^+ \pi^- n$ von entscheidender Bedeutung, um die beobachteten Daten zu erklären. Der qualitative Verlauf des Wirkungsquerschnittes ist unter Berücksichtigung dieser gut wiedergegeben. Quantitativ bleibt jedoch ein Defizit von etwa 10 Prozent gegenüber den experimentellen Daten (linke Bildhälfte).

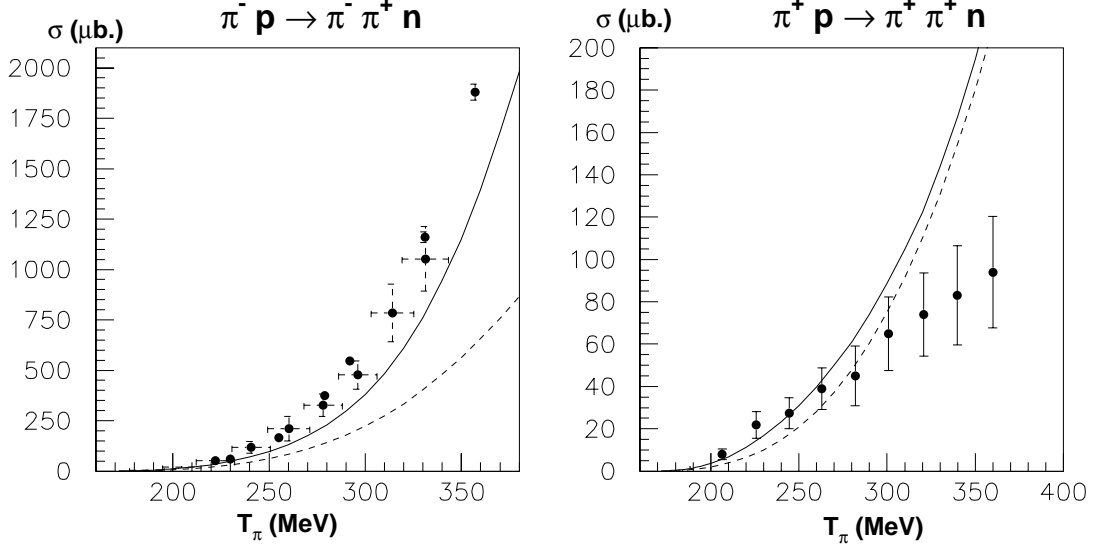


Abbildung 6.5: Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen $\pi^\pm p \Rightarrow \pi^\pm \pi^\pm n$. Die durchgezogene Linie erhält man mit der in Gl.(6.2) angegebenen Lagrangedichte, während die gestrichelte Kurve in demselben Modell ohne Berücksichtigung der Δ - und Roper-Resonanz berechnet wurde. Die Daten stammen dabei aus [69]-[71].

Im Fall $\pi^+ p \Rightarrow \pi^+ \pi^+ n$ ist der Einfluß der Resonanzen nur sehr gering. Die theoretische Kurve zeigt jedoch bereits ab kinetischen Energien von 300 MeV Abweichungen, die mit steigender Energie noch deutlicher ausfallen. Die experimentellen Daten gehen in eine Sättigung über, während der theoretisch berechnete Wirkungsquerschnitt weiter ansteigt (rechte Bildhälfte).

Die differentiellen Wirkungsquerschnitte, die man mit diesem Modell gewinnt sind für niedrige kinetische Energien in guter Übereinstimmung mit den gemessenen Daten, zeigen in manchen Reaktionskanälen jedoch spürbare Abweichungen bis zu 30 Prozent [68].

6.1.2 Endzustandswechselwirkungen

Mit der T-Matrix für den elementaren Prozess $\pi N \Rightarrow \pi \pi N$ und der vorgestellten Reaktionstheorie, lässt sich der in Gl.(6.1) angegebene Wirkungsquerschnitt berechnen.

Erste Rechnungen haben jedoch gezeigt, daß der im Experiment beobachtete Anstieg bei niedrigen invarianten Massen nicht reproduziert werden kann. Ein möglicher Erklärungsversuch für diesen Anstieg, der nur in dem Experiment auftritt, in dem das ausgehende Pionenpaar die Quantenzahlen $I=J=0$ hat, liegt in einer starken Modifikation der

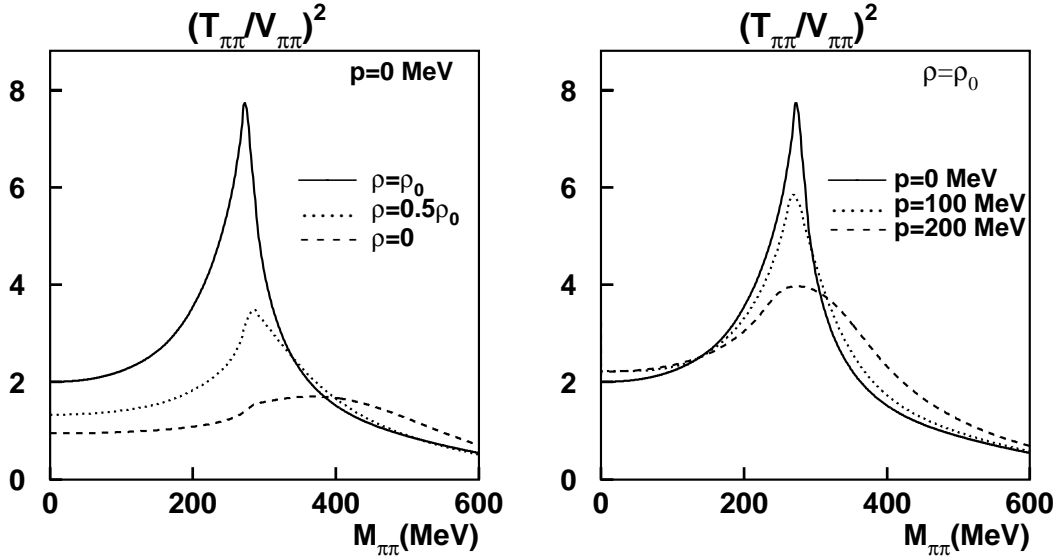


Abbildung 6.6: Stärke der Endzustandswechselwirkungen des Pionenpaares im $I=J=0$ Kanal. Für verschwindenden Dreierimpuls sieht man diese bei 3 verschiedenen Dichten als Funktion der invarianten Masse der Pionen. Deutlich erkennt man den starken Anstieg an der Zwei-Pion-Schwelle (linkes Bild).

Bei Kernmateriedichte sieht man mit wachsendem Dreierimpuls eine Verbreiterung der Stärke bei gleichzeitiger Abnahme (rechtes Bild). Dieser Effekt war bereits in den Imaginärteilen der T -Matrix und des σ -Propagators zu sehen.

$\pi\pi$ -Wechselwirkung in dichter Materie. In der Tat sieht man im Imaginärteil der $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix mit steigender Dichte einen starken Anwachs von Stärke in Schwellennähe (siehe Abb. 5.7). Dieser ist auf den $I=J=0$ Kanal beschränkt und im Kanal $I=2, J=0$ abwesend. Damit besteht die Möglichkeit den im CHAOS-Experiment beobachteten Effekt durch Endzustandswechselwirkungen der beiden ausgehenden Pionen zu erklären. Dabei nimmt man an, daß die beiden ausgehenden Pionen während ihrer Propagation durch das Medium miteinander wechselwirken, also miteinander streuen. Die Stärke dieser Wechselwirkungen ist dann durch die $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix und ihre Änderung gegenüber dem Vakuum gegeben. Im Rahmen eines vereinfachten Modelles konnte unter Einbeziehung von Endzustandswechselwirkungen bereits eine teilweise Übereinstimmung mit den Meßdaten erzielt werden [72]. Die Dichteeffekte wurden dabei mittels eines Parameters α modelliert, der einen Abfall der Masse des σ -Mesons um 20-30 % bei Kernmateriedichte bewirkte. Nachteil dieses einfachen Modells war eine unrealistische hohe Ansammlung von Stärke an der Schwelle, sowie das Fehlen einer Impulsabhängigkeit.

Die in Gl.(6.1) hergeleitete Formel für den Wirkungsquerschnitt erhält unter Berücksichtigung dieser Endzustandswechselwirkungen einen zusätzlichen Faktor $|T_{\pi\pi}^{I=J=0}/V_{\pi\pi}|^2$, der ein Maß für die Stärke der Endzustandswechselwirkungen der beiden ausgehenden Pionen in dichter Materie ist. Mit der im vorangegangenen Kapitel diskutierten Streumatrix $T_{\pi\pi}$ und dem Potential im Vakuum $V_{\pi\pi}$ lässt sich dieser Faktor dann berechnen. Den Verlauf dieser

Größe bei verschiedenen Dichten und Impulsen kann man in Abb. 6.6 sehen. In der linken Bildhälfte sieht man dabei die Dichteabhängigkeit als Funktion der invarianten Masse des Pionpaars. Mit steigender Dichte erkennt man einen deutlichen Zuwachs an Stärke gegenüber dem Vakuum. An der Schwelle wächst dieser Faktor bei Kernmateriedichte auf den Faktor 8 an, aufgrund der starken Modifikationen in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung und im σ -Meson.

Erlaubt man zusätzlich einen endlichen Dreierimpuls für das Pionpaar sieht man in der rechten Hälfte eine Verbreiterung bei gleichzeitiger Abnahme der Stärke von T/V auf einen Wert von 4 bei einem Dreierimpuls von 200 MeV. Durch den Dreierimpuls wird der eng an der Schwelle lokalisierte Anstieg abgeschwächt und über einen größeren Energiebereich verteilt.

6.1.3 Differentielle Wirkungsquerschnitte

Nachdem in den vorherigen Kapitel die Reaktionstheorie und die darin enthaltenen Terme besprochen worden sind, wollen wir nun die Ergebnisse für die differentiellen Wirkungsquerschnitte präsentieren und mit dem Experiment vergleichen. In Abb. 6.7 sieht man den Vergleich der theoretisch ermittelten Kurven mit dem Experiment für die vier gemessenen Kerne. Obwohl der generelle Verlauf der differentiellen Wirkungsquerschnitte befriedigend wiedergegeben werden kann, fallen doch einige Diskrepanzen ins Auge. Zunächst erkennt man für das Deuterium eine Überschätzung des differentiellen Wirkungsquerschnittes im Energiebereich bis 350 MeV. Die Ursache hierfür liegt in den Problemen der Elementaramplitude die differentiellen Wirkungsquerschnitte zu reproduzieren, trotz der guten Übereinstimmung der totalen Wirkungsquerschnitte. Für die schwereren Kerne ist der generelle Verlauf besser wiedergegeben, ohne jedoch den Anstieg bei geringen invarianten Massen erklären zu können. Die durchgezogene Linie berücksichtigt dabei bereits die Endzustandswechselwirkungen. Dieses zunächst überraschende Ergebnis lässt sich auf zwei Ursachen zurückführen: Zum einen konnte in einer genaueren Untersuchung des Reaktionsprozesses gezeigt werden [76], daß aufgrund der starken Absorption des einfallenden Pions ein Großteil der Pionproduktionsprozesse an der Oberfläche des Kerns und damit bei geringen Dichten stattfindet. Zum anderen spielt der endliche Impuls eine wichtige Rolle bei der Unterdrückung des Effekts [77]. Dazu haben wir uns zunächst die kinematische Verteilung von invarianter Masse und Gesamtimpuls des Pionenpaares angeschaut. Diese Verteilung, die in Abb. 6.8 dargestellt ist, hat aufgrund der Detektorgeometrie eine etwas ungewöhnliche Form. Die meisten Ereignisse mit höherer invarianter Masse können von dem Detektor nicht gemessen werden, so daß sich die in Abb. 6.8 gezeigte Anhäufung von Ereignissen mit einer invarianten Masse von $M_{\pi\pi} \approx 2m_\pi$ ergibt. Darüber hinaus erkennt man, daß die Mehrzahl der Ereignisse, die zur Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitt beitragen, einen mittleren Dreierimpuls von $|\vec{p}| \approx 250$ MeV besitzen. Bei diesen Impulsen jedoch ist die Endzustandswechselwirkung bereits deutlich unterdrückt gegenüber den Ereignissen, die bei verschwindendem Dreierimpuls stattfinden. Zudem erfahren aufgrund der Verbreiterung der $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix bei diesen Impulsen die schwelennahen Ereignisse nur noch

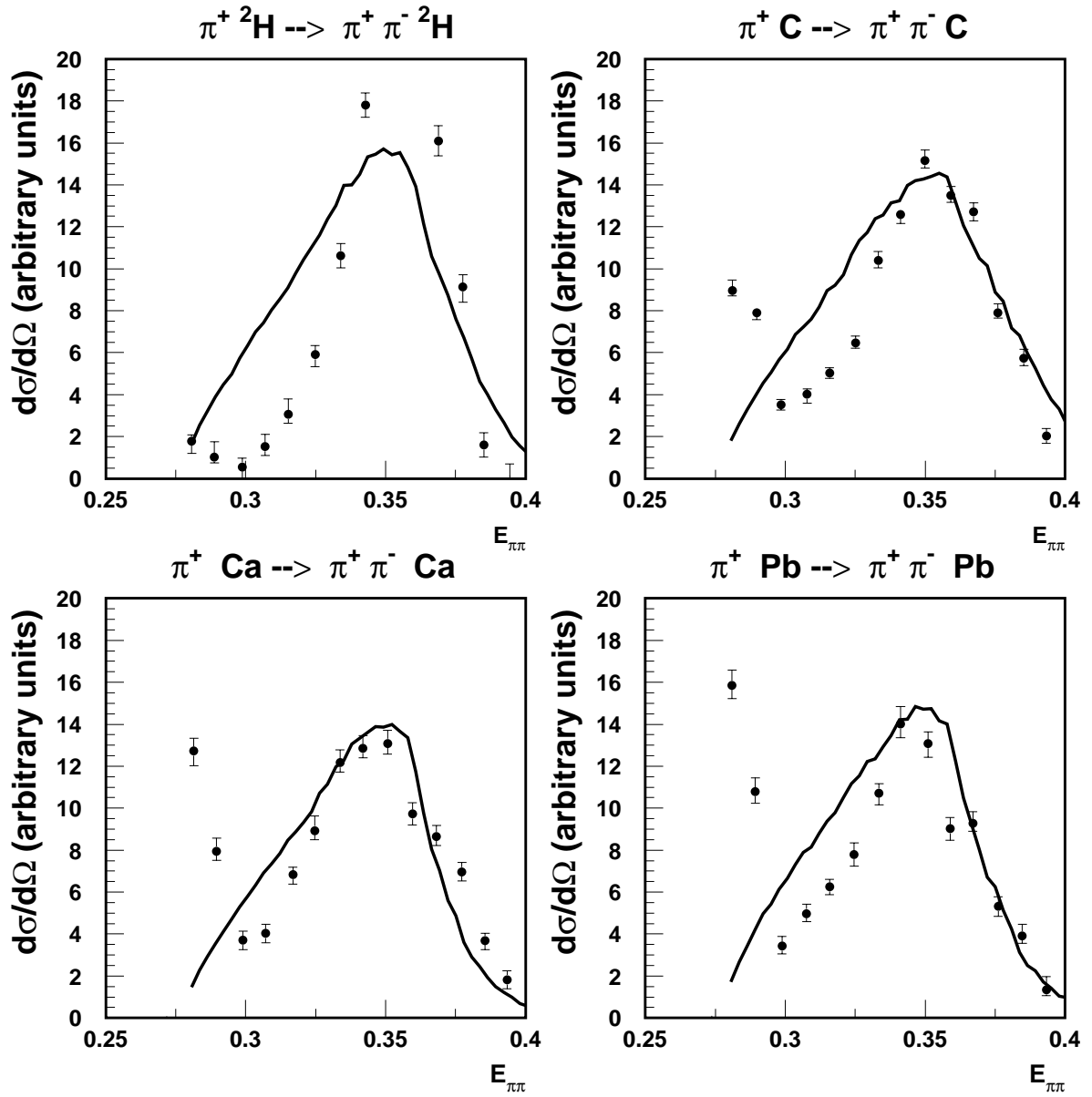


Abbildung 6.7: Differentielle Wirkungsquerschnitt der $\pi A \Rightarrow \pi\pi A$ Reaktionen. Neben den experimentellen Meßdaten für ${}^2\text{H}$ (links oben), ${}^{12}\text{C}$ (rechts oben), ${}^{40}\text{Ca}$ (links unten) und ${}^{208}\text{Pb}$ (rechts unten) sieht man die theoretisch berechneten Kurven. Man kann erkennen, daß der Anstieg an der Zwei-Pion-Schwelle selbst unter Berücksichtigung der Endzustandswechselwirkungen nicht reproduziert werden kann.

einen geringfügigen „Boost“ verglichen mit Ereignissen bei einer invarianten Masse von 400 MeV. Die Stärke der Endzustandswechselwirkungen bei einem Dreierimpuls von 200 MeV zum Beispiel zeigt in dem im Experiment betrachteten Energieintervall einen Abfall

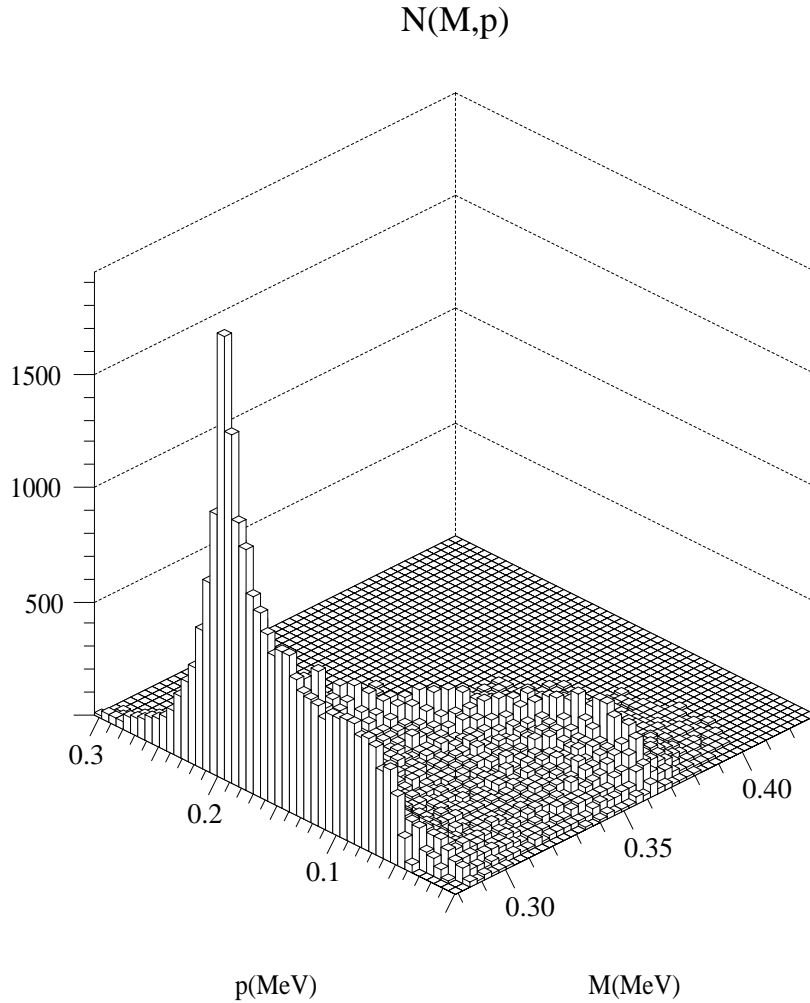


Abbildung 6.8: *Kinematische Verteilung der Ereignisse, die bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes eingehen. Die experimentelle Detektorakzeptanz ist dabei berücksichtigt, ebenso wie das Pauliprinzip für die Nukleonen und die Energie-Impulserhaltung. Geplottet ist dabei die Anzahl der Pionenpaare als Funktion ihrer Dreierimpulse und ihrer invarianten Masse. Die Verteilung zeigt einen Peak bei einem Dreierimpuls von 200-250 MeV/c.*

um den Faktor 2, während bei gleicher Dichte und verschwindendem Dreierimpuls ein Abfall um den Faktor 8 festzustellen ist. Diese beiden Effekte bewirken also, daß die in unserem Modell starke Modifikation der $\pi\pi$ -Wechselwirkung in Schwellennähe nicht den im Experiment gezeigten Zuwachs in Schwellennähe erklären kann.

Ein möglicher Ausweg wurde bereits in einer früheren Arbeit vorgeschlagen [72]: Sowohl

in der $T_{\pi\pi}$ -Streumatrix, als auch in dem Faktor der Endzustandswechselwirkungen sieht man einen beträchtlichen Anteil von Stärke unterhalb der Zwei-Pion-Schwelle. Dieser Anteil ist uns nicht zugänglich, da nur Ereignisse berücksichtigt werden können, in der die beiden Pionen sich auf der Massenschale befinden. In der Tat ist es allerdings möglich, daß das Pionpaar in Medium eine modifizierte Energie-Impuls Beziehung besitzt, mittels der man bei endlichem Dreierimpuls des Pionenpaares in der Lage wäre, die Stärke der $\pi\pi$ -Wechselwirkung auch unterhalb der Zwei-Pion-Schwelle zu detektieren. Aufgrund der benutzten Monte-Carlo Methode zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes ist es jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich „off-shell“-Pionen in Zwischenzuständen zuzulassen. Eine weitergehende Untersuchung in dieser Richtung erfordert daher eine Verbesserung der benutzten Monte-Carlo Methode, die eine im Medium modifizierte Energie-Impuls Beziehung der produzierten Pionen zulässt.

Das Verhältnis $\mathcal{C}_{\pi\pi}^A$

Das wesentliche Interesse in der $\pi A \Rightarrow \pi\pi A$ Reaktion gilt der $\pi\pi$ -Wechselwirkung. Daher ist es zweckmäßig eine Observable zu finden, die größtenteils unbeeinflusst ist von der $A(\pi, 2\pi)$ Reaktion, insbesondere der Akzeptanz des CHAOS Detektors, wie auch den Unsicherheiten bezüglich des zugrundeliegenden $\pi \Rightarrow \pi\pi$ Mechanismus (der sich vor allem in den Diskrepanzen der theoretisch berechneten differentiellen Wirkungsquerschnitte und der für das Deuterium gemessenen experimentellen Daten zeigt). Das Verhältnis $\mathcal{C}_{\pi\pi}^A$, das definiert ist als

$$\mathcal{C}_{\pi\pi}^A = \frac{\frac{d\sigma}{dM_{\pi\pi}^A}}{\sigma^A} / \frac{\frac{d\sigma}{dM_{\pi\pi}^N}}{\sigma^N} \quad (6.6)$$

und welches das Verhältnis der differentiellen Wirkungsquerschnitte in Kernen und am Nukleon, normiert durch die jeweiligen totalen Wirkungsquerschnitte ist, erfüllt diese Bedingung. Es ist ein Maß für den effektiven Einfluß von Kernmaterie auf die $\pi\pi$ -Wechselwirkung, indem durch die Quotientenbildung mit den am Deuterium gemessenen Daten, der Einfluß von globalen, nicht dichteabhängigen Größen, wie der Detektorgeometrie, Detektoreffizienz und der theoretischen Modellierung der elementaren Produktionsamplitude reduziert wird [78]. In Abb. 6.9 sieht man für die beiden erlaubten Reaktionen einen Vergleich des so gebildeten Verhältnisses. In der rechten Bildhälfte sieht man $\mathcal{C}_{\pi\pi}^A$ für die Reaktion $\pi^+ A \rightarrow \pi^+ \pi^+ A$. $\mathcal{C}_{\pi\pi}^A$ zeigt bei allen drei untersuchten Kernen ein nahezu konstantes Verhalten als Funktion der invarianten Masse. In diesem Reaktionskanal lässt sich keine dichteabhängige Modifikation der $\pi\pi$ -Wechselwirkung erkennen. Dies ist in Übereinstimmung mit der Erwartung, daß eine starke Renormierung der $\pi\pi$ -Wechselwirkung nur für Pionenpaare mit den Quantenzahlen des σ -Mesons zu erwarten ist und das $\pi^+ \pi^+$ Paar nicht in diesen Quantenzahlen vorliegen kann.

Für die Reaktion $\pi^+ A \rightarrow \pi^+ \pi^- A$ zeigt sich ein anderes Bild. Mit steigender Massenzahl des untersuchten Kerns zeigt $\mathcal{C}_{\pi\pi}^A$ einen immer stärker werdenden Anstieg in der Nähe der Zwei-Pion-Schwelle. Für Blei findet man einen Wert von 7 an der Schwelle und damit einen deutlichen Zuwachs von Stärke gegenüber den Daten am Deuterium, wie auch um

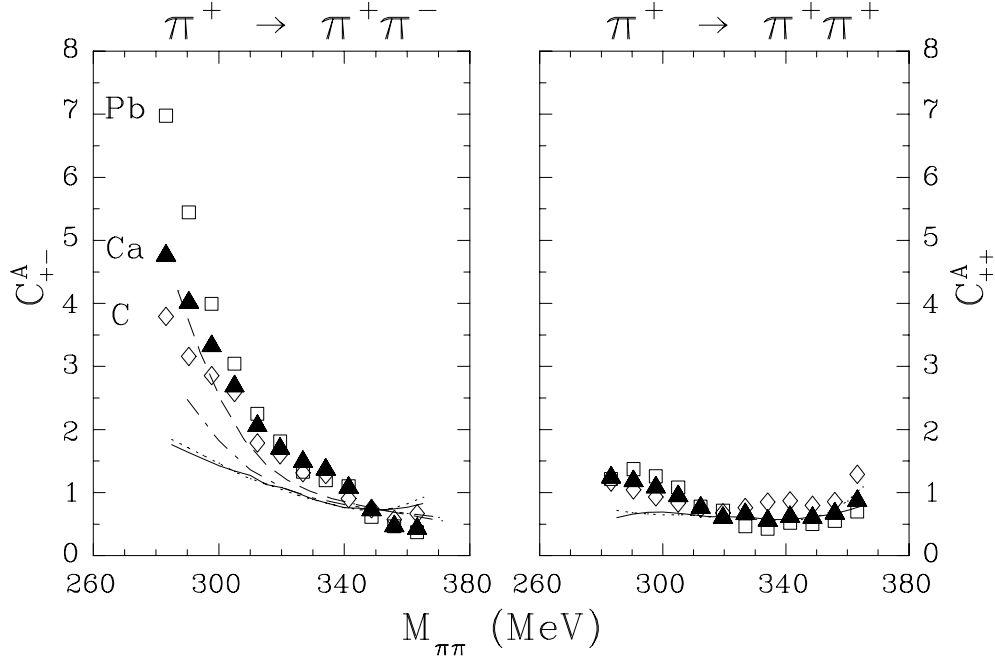


Abbildung 6.9: Darstellung des Verhältnisses $C_{\pi^+\pi^-}^A$ für die beiden Reaktionskanäle [61]. Für die Reaktion mit den Quantenzahlen des σ -Mesons sieht man in der Nähe der Schwelle einen starken dichteabhängigen Anstieg, während im anderen Kanal das Verhältnis konstant um den Wert 1 liegt. Die Kurven sind dabei verschiedenen Modellen entnommen. Die durchgezogene Kurve erhält man aus [60], die strich-punktierte Kurve aus [73], die gestrichelte Kurve aus [74] und die gepunktete Kurve aus [75]

den Faktor 2 höheren Wert als Kohlenstoff. Aufgrund der höheren effektiven Dichte von Blei gegenüber Kohlenstoff und auch Calcium lassen sich diese Unterschiede verstehen (linke Bildhälfte). Die in Abb. 6.9 dargestellten Kurven sind Resultate von Modellrechnungen. Dabei ist in der durchgezogenen und der punktierten Kurve jeweils das Verhältnis $C_{\pi\pi}^{Ca}$ gezeigt. Beide Modelle stimmen überein, lassen jedoch den schwelennahen Anstieg vermissen, der im Experiment zu sehen ist. Die strich-punktierte und gestrichelte Kurve zeigen das Verhältnis $C_{\pi\pi}^{Pb}$. Beide Modelle modellieren die Medium-Effekte des σ -Mesons durch einen in der Dichte linearen Massenabfall von bis zu 30 Prozent bei Kernmateriedichte. Diese Modelle geben den Verlauf des Verhältnisses $C_{\pi\pi}^{Pb}$ über einen grösseren Energiebereich gut wieder, bleiben allerdings an der Schwelle um einen Faktor von 2 unterhalb der experimentellen Daten.

Aufgrund der im vorigen Abschnitt geschilderten Probleme zeigen die im Rahmen unseres Modelles gewonnen Kurven nur einen sehr mäßigen Anstieg in Schwellennähe und sind insbesondere nicht in der Lage, die experimentellen Daten zu beschreiben, sondern zeigen einen sehr flachen Verlauf der Größe $C_{\pi\pi}^A$ und einen Anstieg im Fall von Blei von nur 50 Prozent. Betrachtet man allerdings nur Ereignisse, in der das Pionpaar verschwindenden Dreierimpuls hat, sieht man einen deutlichen Zuwachs an der Schwelle bis hin zu Werten von 3 für Blei, was allerdings immer noch unter den experimentellen Werten liegt.

6.2 Die $A(\gamma, \pi\pi)$ Reaktion

Die Messungen der $\pi\pi$ -Wechselwirkung in dem Pion-induzierten Experiment der CHAOS-Kollaboration hatte mit zwei Problemen zu kämpfen. Zum einen konnten aufgrund der Detektorgeometrie nur ein Bruchteil der Ereignisse gemessen werden, die zudem noch auf einen kleinen kinematischen Bereich des Phasenraums begrenzt waren. Zum anderen kann aufgrund der starken Wechselwirkung des einfallenden Pions mit dem Medium nur die Eigenschaften der Oberfläche des Kerns gemessen werden. Modellrechnungen schätzen die mittlere gemessene Dichte in dem CHAOS-Experiment auf 24 Prozent der Kernmateriedichte [76]. Um eine bessere Messung der $\pi\pi$ -Wechselwirkung in dichter Materie zu erhalten, wurde deshalb vorgeschlagen, elektromagnetische Proben zu verwenden, die den gesamten Kern ausleuchten und bei effektiv höheren mittleren Dichten messen können. Darüber hinaus sollte auch eine Verbesserung der Detektorgeometrie erfolgen, um Effekte, die rein geometrischer Natur sind, zu minimieren.

Das von der TAPS Kollaboration am Mainzer Mikrotron MAMI durchgeführte $A(\gamma, \pi\pi)$ Experiment erfüllt diese Eigenschaften [10]. Im Rahmen dieses Experimentes wurden die Kerne ^1H , ^{12}C und ^{208}Pb mit Photonen der Energie $E_\gamma = 400 - 460$ MeV untersucht und die ausgehenden $\pi^0\pi^0$ respektive $\pi^\pm\pi^0$ Paare gemessen. Die Energie des Photonstrahls ist dabei so gewählt, daß sie mit der im CHAOS-Experiment benutzten Energie im Schwerpunktsystem übereinstimmt. Bei dieser Energie sind zudem die Wechselwirkungen mit der umgebenden Materie noch relativ gering und somit die mittleren freien Weglängen der ausgehenden Pionen sehr hoch. Der Detektor deckt dabei etwa 40 Prozent des gesamten Raumwinkels ab. Die neutralen Pionen werden dabei über die invariante Masse der zwei Photonen, in die sie zerfallen, identifiziert. Ein Ereignis ist dann durch die Koinzidenzmessung von vier Photonen gegeben [10].

Die differentiellen Wirkungsquerschnitte für die beiden Reaktionskanäle sind in Abb. 6.10 zu sehen. Im Kanal $A(\gamma, \pi^0\pi^0)$ sieht man mit steigender Massenzahl des Kerns eine Verschiebung der invarianten Massenverteilung hin zu geringeren invarianten Massen (linke Bildhälfte). Dieser dichteabhängige Effekt ist im anderen Kanal abwesend. Die invarianten Massenverteilungen in der Reaktion $A(\gamma, \pi^\pm\pi^0)$ folgen vielmehr dem Phasenraum (punktierte Linie). Die durchgezogene Linie ist in beiden Bildhälften das Resultat einer Modellrechnung von Oset et al. [79]. Eine Untersuchung der Winkelverteilungen in der $A(\gamma, \pi^0\pi^0)$ Reaktion hat gezeigt, daß diese isotrop sind, sich das Pionenpaar also im Zustand $J=0$ befindet und damit die beobachtete Verschiebung zu kleineren invarianten Massen eine Eigenschaft des $\pi\pi$ -Systems im $I=J=0$ Kanal ist.

Analog zu dem im vorherigen Abschnitt untersuchten Experiment benutzen wir die Reaktionstheorie in Eikonal-Näherung sowie die Absorption der ausgehenden Pionen. Das eingehende Pion ist in dem MAMI Experiment durch ein Photon ersetzt worden und unterliegt im Gegensatz zum Pion nur schwacher Absorption, die wir in erster Näherung vernachlässigen wollen. Neben der geänderten Detektorakzeptanz ist dann als weitere Änderung noch die Elementaramplitude $T_{\gamma N \rightarrow \pi\pi}$ zu bestimmen.

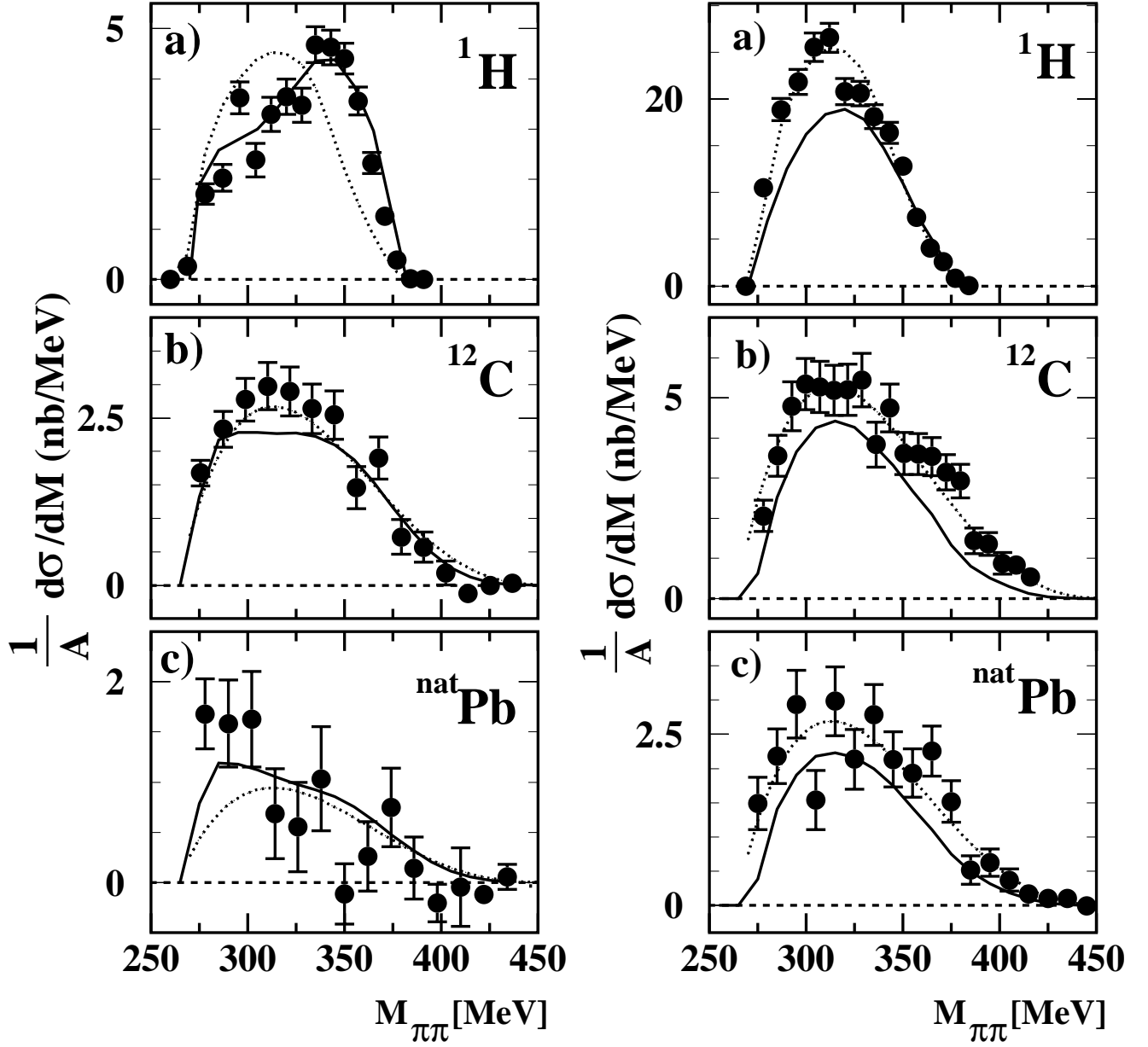


Abbildung 6.10: Differentielle Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen $\gamma A \Rightarrow \pi^0 \pi^0 A$ (links) und $\gamma A \Rightarrow \pi^\pm \pi^0 A$ (rechts). Die durchgezogenen Linien stammen von einem theoretischen Modell von Oset et al [79]. Die punktierte Linie kennzeichnet den Phasenraum für die jeweilige Reaktion. In den Meßdaten erkennt man für das Pionpaar mit $I = J = 0$ einen dichteabhängigen Zuwachs in Schwellennähe, der im anderen Kanal mit $I = 1$ abwesend ist. Die Daten stammen aus [10].

6.2.1 Die elementare Übergangsamplitude $T_{\gamma N \rightarrow \pi\pi N}$

Zur Beschreibung der Photoproduktion zweier Pionen bedienen wir uns einer reduzierten Version des Modells von Gomez-Tejedor et al. [81]. Neben dem Nukleon werden noch die Nukleonresonanzen $\Delta(1232)$, $N^*(1440)$ und $N^*(1520)$ berücksichtigt. Höher liegende Resonanzen und mesonische Zwischenzustände, wie etwa das ρ -Meson werden von uns abweichend von einer weiterentwickelten Version dieses Modells [80] nicht verwendet, da sie in dem für uns interessanten Energieintervall in Schwellennähe keinen großen Beitrag liefern. Die komplette Lagrangedichte für die Reaktion lässt sich damit schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\pi NN} + \mathcal{L}_{\pi\Delta N} + \mathcal{L}_{\pi\Delta\Delta} + \mathcal{L}_{\pi\Delta N^*} + \mathcal{L}_{\pi\Delta N^{*'}} \\ & + \mathcal{L}_{\gamma NN} + \mathcal{L}_{\gamma\pi\pi} + \mathcal{L}_{\pi NN^*} + \mathcal{L}_{\pi\pi NN^*} + \mathcal{L}_{\gamma\pi NN} \\ & + \mathcal{L}_{\gamma\Delta N} + \mathcal{L}_{\gamma NN^*} + \mathcal{L}_{\gamma\pi\Delta N} + \mathcal{L}_{\gamma\pi NN^*} + \mathcal{L}_{\gamma NN^{*'}} , \end{aligned} \quad (6.7)$$

wobei die explizite Form der einzelnen Terme und die verwendeten Kopplungskonstanten und Parameter in Anhang E zu finden sind.

In Baumgraphennäherung lassen sich aus dieser Lagrangedichte die in Abb. 6.11 dargestellten Feynman Diagramme und die zugehörigen Feynman-Regeln ableiten. Im Rahmen dieses Modells für die elementare Reaktion $\gamma A \rightarrow \pi\pi A$ lassen sich dann für die sechs erlaubten Kanäle

$$\begin{aligned} \gamma p &\rightarrow \pi^+ \pi^- p \\ \gamma p &\rightarrow \pi^0 \pi^0 p \\ \gamma p &\rightarrow \pi^+ \pi^0 n \\ \gamma n &\rightarrow \pi^+ \pi^- n \\ \gamma n &\rightarrow \pi^0 \pi^0 n \\ \gamma n &\rightarrow \pi^0 \pi^- p , \end{aligned}$$

die totalen und differentiellen Wirkungsquerschnitte mit

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{m^2}{\lambda(s, 0, m^2)^{1/2}} S_B \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E(p_2)} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega(k_2)} \\ & \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3 2\omega(k_3)} \overline{|T_{\gamma N \rightarrow \pi\pi N}|^2} (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2 - k_3) . \end{aligned} \quad (6.8)$$

berechnen. Dabei ist S_B ein bosonischer Symmetriefaktor der im Fall von $\pi^0\pi^0$ im Endzustand $1/2$ beträgt und ansonsten 1 ist. Die Nukleonen tragen die Impulse p_1 und p_2 , während die Impulse der ausgehenden Pionen k_2 und k_3 sind.

Bei der Berechnung der totalen Wirkungsquerschnitte zeigt sich in Abb. 6.12 beim Vergleich mit den Meßdaten [82],[83] in den drei experimentell zugänglichen Reaktionskanälen eine gute Übereinstimmung. Im Reaktionskanal $\gamma p \rightarrow \pi^+ \pi^- p$ stimmt die theoretisch berechnete Kurve sehr gut mit den Meßdaten über den Energiebereich zwischen 400 MeV und 650 MeV überein. Für höhere Energien des einfallenden Photons sieht man dann eine

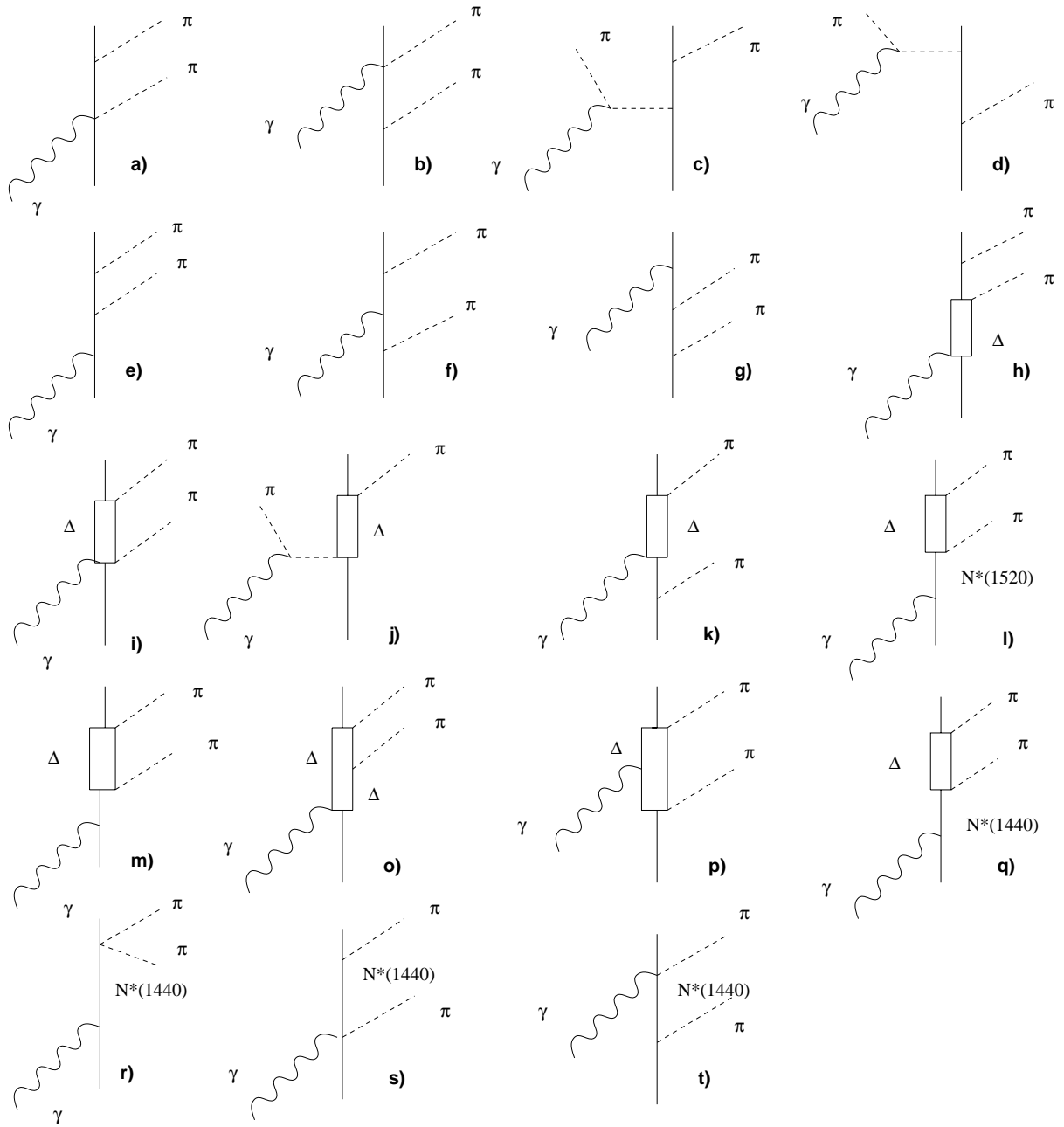


Abbildung 6.11: *Feynman-Diagramme zur Berechnung des totalen und differentiellen Wirkungsquerschnittes in der Reaktion $\gamma N \Rightarrow \pi\pi N$*

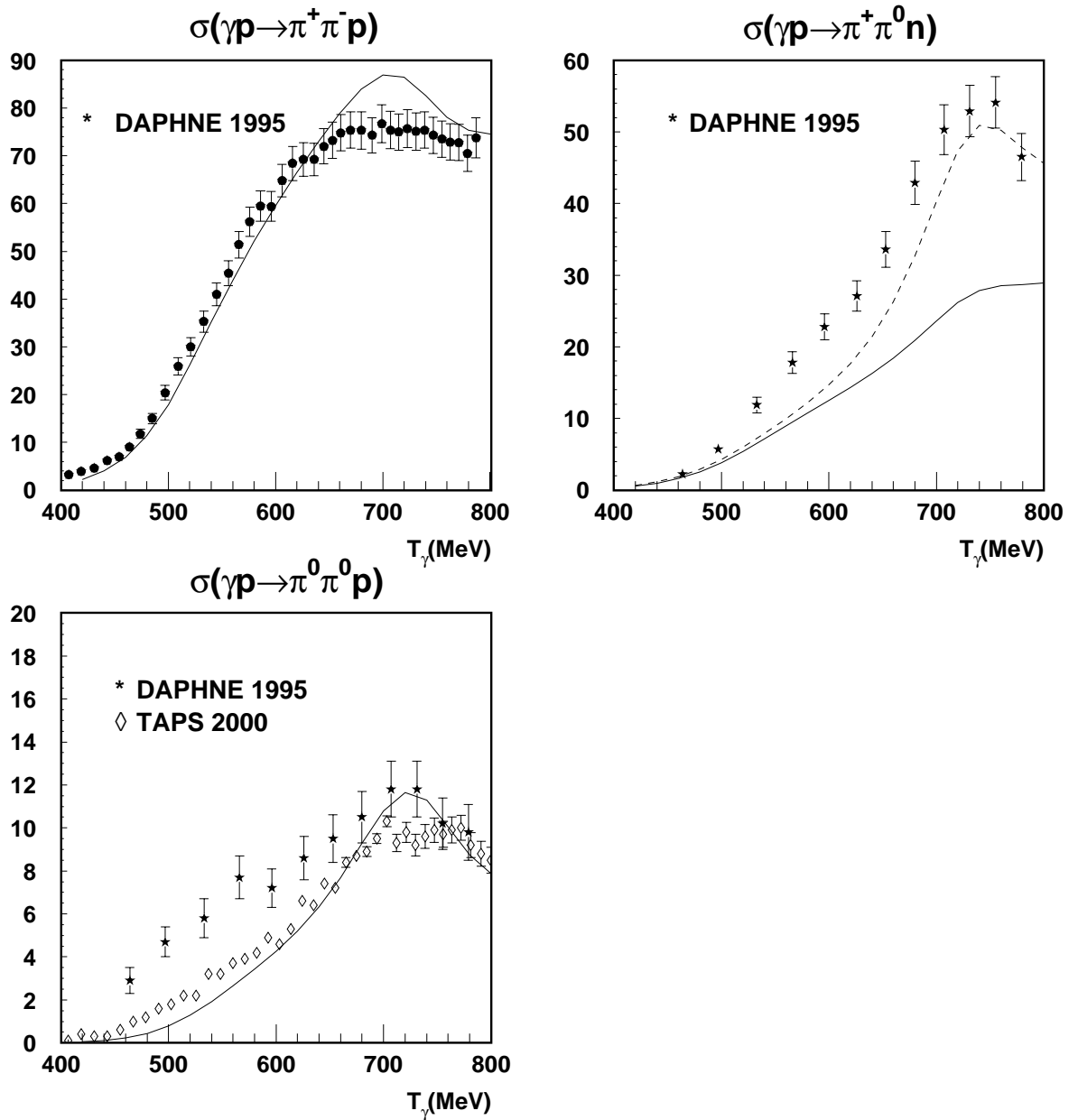


Abbildung 6.12: Totaler Wirkungsquerschnitt in μb für die Photoproduktion von zwei Pionen. Im Vergleich sieht man die Vorhersagen des Modells (durchgezogene Linie) und die gemessenen Wirkungsquerschnitte. Die Meßdaten stammen dabei aus [82] (Sterne) und [83] (Rauten). Die gestrichelte Linie im oberen rechten Bild erhält man unter Berücksichtigung des ρ -Mesons und weiterer Nukleonresonanzen als Zwischenzustände [80].

leichte Überschätzung des totalen Wirkungsquerschnittes (oben links).

Für die Reaktion $\gamma p \rightarrow \pi^+ \pi^0 n$ unterschätzt das Modell die gemessenen Wirkungsquerschnitte deutlich. Eine Verbesserung dieser Situation kann unter Hinzunahme des ρ -Mesons als Zwischenzustand erreicht werden. Die gestrichelte Linie ist hierbei eine Rechnung in dem verbesserten Modell von Roca, in der neben dem ρ -Meson auch die $\Delta(1700)$ Resonanz zusätzlich berücksichtigt wurde (oben rechts).

Im Kanal $\gamma p \rightarrow \pi^0 \pi^0 p$ schließlich gibt das Modell den totalen Wirkungsquerschnitt der TAPS Daten über den gesamten Energiebereich bis 800 MeV gut wieder. Am Maximum der Kurve und in dem Energieintervall bis 500 MeV erkennt man jedoch Abweichungen von den TAPS Daten. Gegenüber den etwas älteren DAPHNE Daten sieht man eine Unterschätzung des totalen Wirkungsquerschnittes um etwa 20 Prozent.

Betrachtet man die differentiellen Wirkungsquerschnitte, die sich mit diesem Modell ergeben, findet man in den beiden Reaktionskanälen mit den Quantenzahlen des σ -Mesons im Endzustand, die im Mittelpunkt unseres Interesses stehen, eine gute Beschreibung der experimentellen Daten [81]. Um eine zufriedenstellende Beschreibung auch für die $\gamma p \rightarrow \pi^+ \pi^0 n$ Reaktion zu erhalten, muß man zusätzlich das ρ -Meson und höher liegende Nukleonanregungen wie die $\Delta(1700)$ Resonanz berücksichtigen [80].

6.2.2 Differentieller Wirkungsquerschnitt $\gamma A \rightarrow \pi\pi A$

Mit dem im vorherigen Abschnitt gewonnenen Modell zur Bestimmung der Elementaramplitude und Gl.(6.1) lassen sich die differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Reaktionen $\gamma A \rightarrow \pi\pi A$ ermitteln.

Analog zu der Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnittes für die $\pi A \rightarrow \pi\pi A$ Reaktion werden mittels einer Monte Carlo Integration zunächst Position und Impuls des an der Reaktion teilnehmenden Nukleons ermittelt, woraus sich dann mit Hilfe einer Woods-Saxon Verteilung für den beteiligten Kern eine effektive Dichte für den Prozess berechnen lässt. Die auslaufenden Pionen unterliegen desweiteren einer Absorption im Medium, während wir für das einlaufende Photon zunächst keine Absorption berücksichtigen. Zudem berücksichtigen wir die Endzustandswechselwirkungen der auslaufenden Pionen, wie in Abb. 6.6 gezeigt. Damit ergibt sich der in Abb. 6.13 dargestellte Vergleich zwischen den Meßdaten und den theoretisch ermittelten differentiellen Wirkungsquerschnitten.

In der linken oberen Bildhälfte sieht man dabei die Daten für die Reaktion am Proton. Die theoretisch ermittelte Kurve ist dabei in sehr guter Übereinstimmung mit den Meßdaten. Die Reaktion am Proton ist eine quasifreie Reaktion bei der Dichteeffekte, wie z.B. die Endzustandswechselwirkungen, nicht berücksichtigt werden. Die gute Übereinstimmung am Proton ist dabei auch eine Bestätigung der verwendeten Reaktionstheorie und der zugrundeliegenden Elementarreaktion $\gamma N \rightarrow \pi\pi N$.

Die experimentellen Daten, wie auch die theoretische Kurve, zeigen ein globales Maximum bei etwa 350 MeV und in der Nähe der Zweipionschwelle einen gegenüber dem Maximum um den Faktor 2,5 unterdrückten Sattelpunkt.

In der oberen rechten Bildhälfte ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für Kohlenstoff

dargestellt. Die Meßdaten zeigen eine Verschiebung des globalen Maximums hin zu niedrigeren Energien, sowie eine damit einhergehende Anhäufung von Stärke in der Nähe der Zwei-Pion-Schwelle. Die von uns theoretisch berechnete Kurve stimmt qualitativ weiter gut mit den Meßdaten überein, kann aber die Verschiebung des Maximums der Verteilung nicht erklären. Durch die Hinzunahme der Endzustandswechselwirkungen sieht man eine Verstärkung des Wirkungsquerschnittes in der Nähe der Zwei-Pion-Schwelle, bleibt aber für Energien von etwa 300-320 MeV unterhalb der Meßdaten. Der Sattelpunkt, der für das Proton deutlich zu erkennen war, ist in den experimentellen Daten nicht mehr zu erkennen, während er in unserer theoretischen Kurve noch zu erkennen ist.

In der unteren linken Bildhälfte sieht man den Vergleich der Meßdaten an Blei mit zwei theoretischen Kurven. Auffallend ist zunächst, daß die Datenpunkte mit einem relativ großen Meßfehler behaftet sind aufgrund mangelnder Statistik. Dennoch läßt sich erkennen, daß das Maximum weiter zu niedrigeren Energien hin verschoben ist und in der Nähe der Zwei-Pion-Schwelle liegt. Die durchgezogene Kurve zeigt im Vergleich mit den Kohlenstoff- und Protodaten eine weitere Verstärkung des schwelennahen Bereiches aufgrund der stärkeren Endzustandswechselwirkungen in Blei. Diese sorgen dafür, daß die Sattelstelle an der Schwelle fast die gleiche Stärke wie das Maximum besitzt, welches allerdings aus den Meßdaten verschwunden ist. Insgesamt zeigt sich jedoch nur eine geringe Übereinstimmung mit den Meßdaten. Die Rechnung liegt in Schwellennähe etwas unterhalb der Daten, auch wenn der plateauartige Verlauf qualitativ richtig wiedergegeben wird. Für mittlere Energien von 300 bis 350 MeV liegen die Datenpunkte jedoch deutlich unter dem berechneten differentiellen Wirkungsquerschnitt, und desweiteren fehlt das Maximum, das sich in der theoretischen Kurve noch zeigt. Im Abfall des Wirkungsquerschnittes für Energien ab 350 MeV stimmt die Kurve mit den Meßdaten gut überein.

Um die Bedeutung und den Einfluß des endlichen Dreierimpulses auf die Endzustandswechselwirkungen und damit den Wirkungsquerschnitt zu untersuchen, haben wir im Fall von Blei eine Rechnung durchgeführt, in der bei der Berechnung der Endzustandswechselwirkung angenommen wurde, daß das Pionenpaar verschwindenden Dreierimpuls habe. Das Ergebnis dieser Rechnung ist die gestrichelte Kurve in den Bleidaten. Für hohe Energien unterscheidet sich diese Kurve nur unwesentlich von der Rechnung mit realistischem Dreierimpuls. Für Energien in der Nähe der Schwelle ist allerdings der Wirkungsquerschnitt um bis zu 50 Prozent erhöht und beschreibt damit die gemessenen Daten besser. Es bleibt jedoch die Diskrepanz im mittleren Energiebereich bestehen.

Zusammenfassend kann man bei Betrachtung der Kurven sagen, daß mit steigender Massenzahl des Targetkerns - und damit mit zunehmender effektiver Dichte - eine stärker werdende Abweichung der theoretischen Kurve von den Meßdaten beobachtet. Die Ursache dafür ist wohl darin zu suchen, daß die Dichteeffekte, die mit steigender Massenzahl des Targetkerns zunehmen, in unserer Beschreibung nicht vollständig erfaßt sind.

Ein Grund für die Abweichung der theoretischen Kurve von den Daten könnte in der Beschreibung unserer Endzustandswechselwirkung liegen, wie bereits durch die gestrichelte Kurve angedeutet. Wie in den Kurven für Kohlenstoff und Blei deutlich geworden, bewirken diese zwar eine Anhäufung von Stärke in Schwellennähe aufgrund der starken

Modifikation des σ - Mesons in der Nähe der Schwelle. Bei Mittelung über die auftretenden endlichen Dreierimpulse und die auftretenden Dichten sind diese Endzustandswechselwirkungen aber nicht stark genug, um die experimentellen Daten wiederzugeben. Benutzt man den unrealistischen Fall von verschwindendem Dreierimpuls, sieht man in der linken unteren Bildhälfte eine weitere Verstärkung der Endzustandswechselwirkungen, wodurch die Daten besser beschrieben werden können. Die von uns untersuchten Modifikationen der $\pi\pi$ Wechselwirkung sind daher nicht ausreichend um den beobachteten Effekt alleine zu erklären, und weitere Dichteeffekte sind notwendig, um die beobachteten Wirkungsquerschnitte zu erklären.

Neben den Endzustandswechselwirkungen, beeinflusst die Dichte vor allem die Beschreibung der Absorption der ausgehenden Pionen. Für das einlaufende Photon machen wir die Annahme, daß keine Absorption eintritt und behandeln nur die Absorption der ausgehenden Pionen in Eikonalnäherung. Zur Bestimmung der Absorption benutzen wir das Modell aus [63]. Dieses parametrisiert die Pionabsorption mittels eines energieabhängigen Koeffizienten, so daß die Streudaten für Energien bis etwa 100 MeV der ausgehenden Pionen qualitativ gut beschrieben werden können. Für höhere Energien wird das Deltaresonanz-Modell benutzt.

Ein realistischeres Modell zur Beschreibung der Absorption für die Photoproduktion von zwei Pionen findet man in [79],[87]. Dort wird ein imaginäres Potential benutzt, welches quasielastische Kollisionen und Absorptionsprozesse beinhaltet und im Vergleich mit dem Experiment eine gute Beschreibung von Wirkungsquerschnitten und Absorption erlaubt. Interessant wäre zu untersuchen, inwieweit bei Benutzung dieses Modells eine Verbesserung eintritt und die differentiellen Wirkungsquerschnitte wiedergegeben werden könnten. In [88] wird eine andere Möglichkeit zur verbesserten Beschreibung des differentiellen Wirkungsquerschnittes benutzt. Statt reiner Absorption der ausgehenden Pionen werden zusätzlich elastische Endzustandswechselwirkungen berücksichtigt. Mit Hilfe eines Potentials, welches sowohl die Absorption beschreibt als auch elastische Streuung und Ladungsaustauschreaktionen erlaubt, konnte im Rahmen eines Transportmodells eine gute Beschreibung der differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Reaktion $\gamma N \rightarrow \pi\pi N$ erzielt werden, ohne Modifikationen der $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Medium zu benutzen [88]. Schwachstelle in diesem Modell ist allerdings, daß es nicht in der Lage ist gleichzeitig die $\gamma N \rightarrow \pi^0\pi^+N$ Reaktion zu beschreiben. Damit bleibt die Frage offen, inwieweit die beobachtete Verschiebung von Stärke im $I=J=0$ Kanal der $\gamma N \rightarrow \pi\pi N$ Reaktion durch Pionabsorption, Mitberücksichtigung eines Realteils im Streupotential, durch eine verbesserte Beschreibung der Endzustandswechselwirkungen oder eine Kombination aller drei Faktoren erklärt werden kann.

Dichteeffekte bei CHAOS und TAPS

In Gl.(6.6) hatten wir das Verhältnis $\mathcal{C}_{\pi\pi}^A$ eingeführt, um unabhängig von dem Reaktionsmechanismus, Detektorgeometrie und Nachweiseffizienz, Aussagen über den Einfluss von

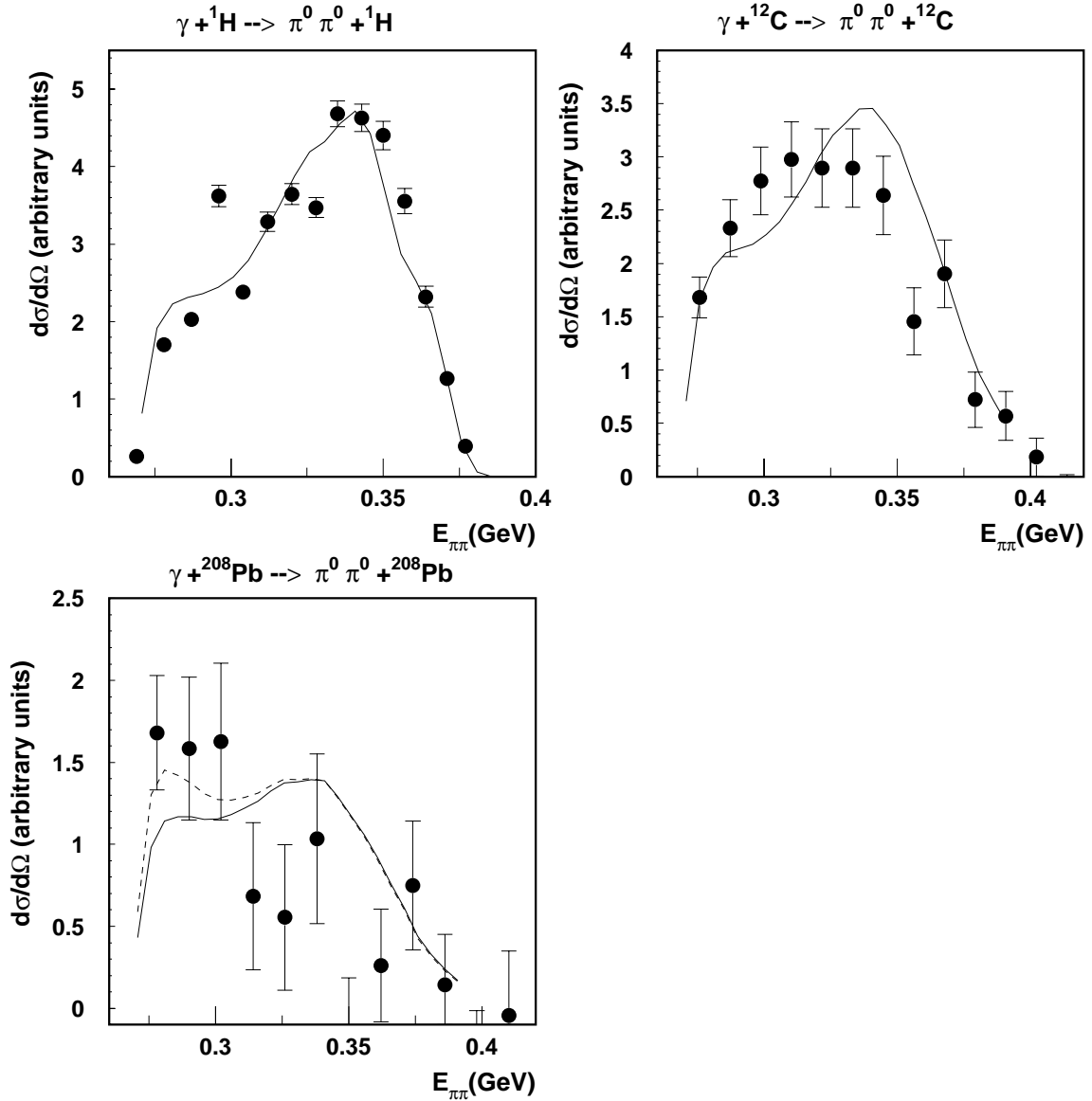


Abbildung 6.13: Vergleich der experimentellen differentiellen Wirkungsquerschnitte für die $\gamma A \rightarrow \pi\pi A$ Reaktion mit den theoretisch ermittelten Kurven. Die Übereinstimmung mit den Daten für Deuterium ist dabei sehr gut, was ein Test für die Beschreibung des zugrundeliegenden Pionproduktionsprozesses ist (oben links). Mit steigender Massenzahl sieht man zunehmend Abweichungen von den Meßdaten, wobei aber der qualitative Anstieg in Schwellennähe mit steigender Massenzahl sowohl in den theoretischen als auch experimentellen Kurven zu sehen ist (oben rechts für Kohlenstoff und unten links für Blei). Die gestrichelte Linie für Blei zeigt eine Rechnung, in dem bei der Berechnung der Endzustandswechselwirkung verschwindender Dreierimpuls des Pionpaares angenommen wurde.

dicke Materie auf die $\pi\pi$ -Wechselwirkung treffen zu können.

Als Referenzreaktion für das Vakuum diente in dem von der CHAOS Kollaboration durchgeführten Messung Deuterium, während von der TAPS Kollaboration Wasserstoff verwendet wurde. Da aber von beiden Gruppen sowohl Kohlenstoff als auch Blei als schwere Targetkerne benutzt wurden eignet sich das Verhältnis der an diesen Kernen gewonnenen Meßdaten

$$C_{\pi\pi}^{Pb/C} = \frac{\frac{d\sigma}{dM_{\pi\pi}^{Pb}}}{\sigma^{Pb}} / \frac{\frac{d\sigma}{dM_{\pi\pi}^C}}{\sigma^C} \quad (6.9)$$

zum Vergleich der beiden Reaktionen. In Abb. 6.14 sieht man diesen Vergleich grafisch dargestellt. Die vollen Punkte sind dabei die Daten der photoninduzierten Reaktion, während die offenen Punkte von der pioninduzierten Reaktion stammen. Die durchgezogene Linie ist dabei die entsprechende theoretische Rechnung für die Photoproduktionsreaktion. In den Meßdaten der pioninduzierten Reaktion erkennt man für Energien größer 320 MeV ein schwach abfallendes Verhalten um den Wert von 1. Die Unterschiede in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung der beiden untersuchten Kerne ist in diesem Energieintervall gering.

In den Daten der photoinduzierten Reaktion zeigt sich ein ähnliches Verhalten. Ab einer Energie von 320 MeV variieren die Datenpunkte um einen Wert von 0.6. Diese sind allerdings aufgrund der fehlenden Statistik mit teilweise recht großen Fehlerbalken behaftet. Für Energien in der Nähe der Produktionsschwelle hingegen sieht man dann für beide Reaktionen einen Anstieg des Verhältnisses $C_{\pi\pi}^{Pb/C}$. Die CHAOS-Daten zeigen dabei einen Anstieg bis hin zu einem Wert von knapp 2 an der Schwelle. In den TAPS-Daten sieht man einen Wert von 2.5. Beide Experimente zeigen hier einen dichteabhängigen Anstieg des Wirkungsquerschnittes in der Nähe der Schwelle. Dies könnte ein Anzeichen für eine Modifikation der $\pi\pi$ Wechselwirkung in Kernen mit zunehmender Massenzahl und damit einhergehender Dichte darstellen. In diesem Zusammenhang ließe sich auch der höhere Wert in der photoinduzierten Reaktion erklären: Die Wechselwirkung der einfallenden Photonen mit der umgebenden Kernmaterie ist deutlich geringer als die Wechselwirkung des einfallenden Pions im pioninduzierten Experiment. Daher dringt das Photon im Mittel in die dichteren Regionen des Kernels vor, in denen eine stärkere Modifikation der $\pi\pi$ -Wechselwirkung erwartet wird, als an der Oberfläche und damit der höhere Wert zu erklären wäre.

Betrachtet man die theoretische Rechnung erkennt man eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Verlauf der CHAOS-Daten ab Energien von 300 MeV. Im Rahmen der Fehlergrenzen ergibt sich auch eine befriedigende Beschreibung der TAPS-Daten in diesem Energiebereich. Diskrepanzen zu den Daten findet man allerdings für Energien in der Nähe der Produktionsschwelle: Das theoretische Verhältnis $C_{\pi\pi}^{Pb/C}$ bleibt hier deutlich unterhalb der gemessenen Daten und kann den starken Anstieg nicht beschreiben. In der theoretischen Rechnung nimmt $C_{\pi\pi}^{Pb/C}$ an der Schwelle einen Wert von 1.5 an, der deutlich unter den Werten von 2, bzw. 2.5, in den experimentellen Daten zurückbleibt. Dies ist in Übereinstimmung mit dem bereits in vorherigen Abschnitten angesprochenem Problem, eine gute

Beschreibung der differentiellen Wirkungsquerschnitte in diesem Energieabschnitt liefern zu können. In diesem Zusammenhang stellt sich erneut die Frage, inwieweit die Modifikation der $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Medium dominant für den im Experiment beobachteten Anstieg verantwortlich ist oder ob andere Effekte auch eine wichtige Rolle spielen.

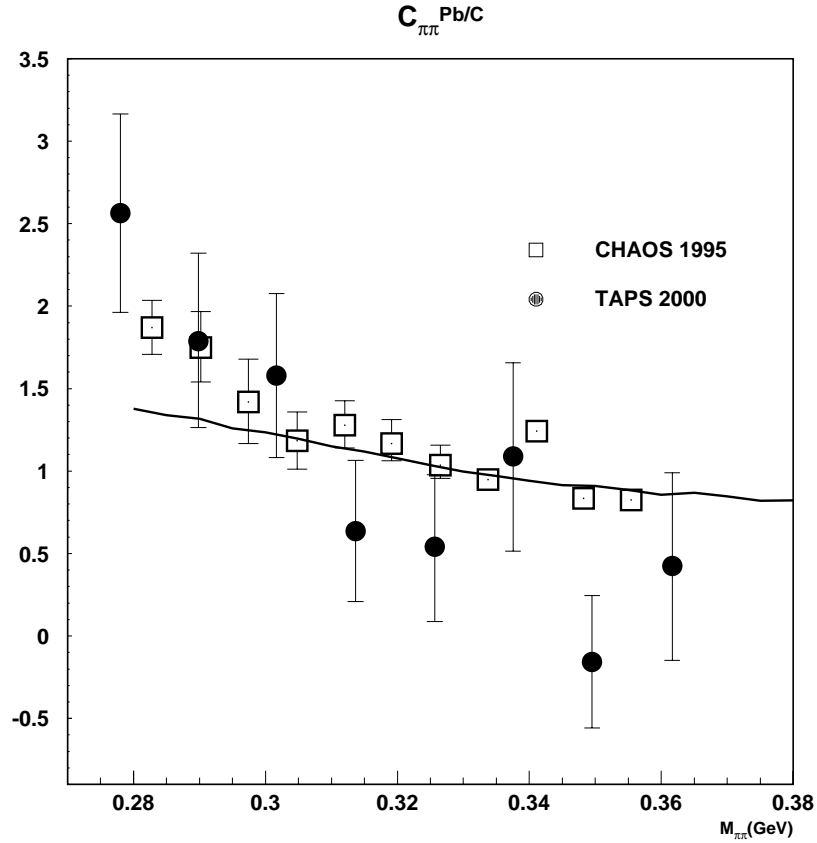


Abbildung 6.14: Vergleich des Verhältnisses $C_{\pi\pi}^{Pb/C}$ in den Experimenten der TAPS- und CHAOS-Kollaboration. Beide Experimente zeigen einen dichteabhängigen Anstieg in der Nähe der Zweipionschwelle. Dabei ist dieser Effekt deutlicher ausgeprägt, wenn anstelle eines einlaufenden Pions ein Photon verwendet wird. Die durchgezogene Linie ist dabei das Resultat unserer Rechnung für $C_{\pi\pi}^{Pb/C}$ für die photoninduzierte Reaktion.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir die $\pi\pi$ -Wechselwirkung sowie die Eigenschaften des σ -Mesons in dichter und heißer Materie untersucht. Das Interesse an den Eigenschaften dieser lässt sich auf zwei Gründe zurückführen. Einerseits spielen $\pi\pi$ -Korrelationen eine wichtige Rolle in hadronischer Materie bei der Bestimmung der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung oder der Frage nach der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei endlicher Dichte. Darüber hinaus zeigen neuere Experimente, die die $\pi\pi$ -Wechselwirkung in dichter Materie untersucht haben, einen dichteabhängigen Anstieg des differentiellen Wirkungsquerschnittes, der ein gesteigertes Interesse an einer theoretischen Beschreibung zu Folge hatte. Andererseits erwartet man in rein pionischer Materie bei endlicher Temperatur einen solchen Anwachs der $\pi\pi$ -Wechselwirkung, so daß es im skalaren-isoskalaren Kanal zur Bildung eines gebundenen Zwei-Pion Zustandes kommt -dem σ -Meson.

Zur Bestimmung des σ -Mesons und der $\pi\pi$ -Wechselwirkung haben wir der chiralen Symmetrie und der sich daraus ergebenden Forderungen -wie etwa den Niederenergie-theoremen und den chiralen Wardidentitäten- besondere Beachtung geschenkt. Die chiralen Wardidentitäten erlaubten uns, die Stärke der $\pi\pi$ -Wechselwirkung mit den Propagatoren von Pion und σ -Meson in Verbindung zu bringen. Eine weitere Forderung, die sich aus der chiralen Symmetrie ableiten lässt, ist das Auftreten der Pionen als masselose Goldstonebosonen im chiralen Limes.

Neben diesen Forderungen aus der chiralen Symmetrie, die man bei einer erfolgreichen Beschreibung der $\pi\pi$ -Wechselwirkung beachten muss, ist ein wesentlicher Punkt der Arbeit das Verhalten in der Nähe des chiralen Phasenübergangs, wie bereits anfangs erwähnt. Dies schließt einen störungstheoretischen Ansatz aus und verlangt folglich nach einer symmetrieerhaltenden, nichtperturbativen Methode. Eine Beschreibung, die dies leisten kann, ist der um RPA Fluktuationen erweiterte Hartree-Fock-Bogoliubov Formalismus. Diese haben wir in Kapitel 2 vorgestellt. Desweiteren haben wir Vorhersagen der chiralen Symmetrie über die Stärke der $T_{\pi\pi}$ Streumatrix zusammengestellt, um die Resultate unserer Rechnung mit diesen vergleichen zu können.

In Kapitel 3 wurden dann im ersten Schritt die freien Parameter des Modells an die Streudaten im Vakuum angepasst. Damit ergibt sich eine gute Beschreibung der

$\pi\pi$ -Wechselwirkung, die zum einen die Vorhersagen aus der chiralen Störungstheorie gut erfüllt und eine sehr gute Beschreibung der experimentellen Streudaten bis zu einer Energie von 800 MeV leisten kann. Für den σ -Propagator erhält man im Vakuum eine sehr breite Resonanz mit einer Masse von 550 MeV und einer Halbwertsbreite von knapp 400 MeV. Nachdem die elementaren Eigenschaften des σ -Mesons und der $\pi\pi$ -Wechselwirkung im Vakuum bestimmt wurden, haben wir uns der Frage der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei endlicher Temperatur gewidmet. Dabei haben wir den Verlauf der Massen von Pion und σ -Meson im chiralen Limes sowie für den Fall der expliziten Brechung der chiralen Symmetrie berechnet. Im ersteren Fall findet man die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie und die damit verbundene Massenentartung von Pion und σ -Meson bei einer Temperatur von 170 MeV. Dieser Wert ist in sehr guter Übereinstimmung mit Gittereichrechnungen, die eine kritische Temperatur ebenfalls um 170 MeV vorhersagen. Zudem beobachten wir einen Phasenübergang zweiter Ordnung, wie er im Fall von zwei Flavours erwartet wird.

Im Fall der expliziten Brechung kommt es nur zu einer teilweisen Wiederherstellung der chiralen Symmetrie. Die Masse des σ -Meson nimmt mit steigender Temperatur ab und fällt bei einer Temperatur von 200 MeV unter die Schwelle für die Produktion von zwei Pionen. Ein Zerfall in zwei Pionen ist dann nicht mehr möglich, und das σ -Meson ist dann ein stabiles Teilchen. Damit einhergehend ist ein deutlicher Zuwachs der $\pi\pi$ -Wechselwirkung, vor allem in der Nähe der Zwei-Pion-Produktionsschwelle.

Könnte man diese starke Modifikation im Experiment nachweisen, wäre dies ein Signal für die (teilweise) Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei endlicher Temperatur. Neben den Massen von Pion und σ -Meson haben wir zudem den Verlauf des Kondensates, dem Ordnungsparameter der chiralen Symmetrie, verfolgt. Für geringe Temperaturen ist dieser in sehr guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen der chiralen Symmetrie. Erst bei höheren Temperaturen, bei denen die Fluktuationen zunehmend wichtiger werden und die Gültigkeit der chiralen Störungstheorie in Frage gestellt werden kann, weicht das Kondensat zum Teil deutlich ab und kann in der Nähe der kritischen Temperatur durch den kritischen Exponenten β beschrieben werden.

Neben dem Bereich endlicher Temperatur lag der zweite Fokus dieser Arbeit in der Untersuchung der $\pi\pi$ -Wechselwirkung bei endlicher Dichte und der Anwendung auf in diesem Bereich durchgeführter Experimente. Zunächst haben wir in Kapitel 5 das Modell auf endliche Dichte ausgeweitet. Bei der Erweiterung auf endliche Dichte sind dabei neue Kopplungen zu berücksichtigen, wie etwa Teilchen-Loch oder Delta-Loch Beiträge, die für das Verständnis des Pions bei endlicher Dichte sehr wichtig sind. Betrachtet man die entsprechenden Kanäle für das σ -Meson, stellt man fest, daß diese einen attraktiven Beitrag zum σ -Meson und der $\pi\pi$ -Wechselwirkung liefern, der bereits bei Kernmateriedichte zu Instabilitäten führt und Kondensation erlaubt. Durch die Einführung von repulsiven Termen analog den Migdal-Parametern im Fall des Pions haben wir zunächst das σ -Meson stabilisiert und die dabei auftretenden Parameter durch ein Experiment fixiert. Der somit erhaltene σ -Propagator zeigt mit steigender Dichte eine Massenabnahme, die von 550 MeV im Vakuum hin zu 300 MeV bei Kernmateriedichte

reicht. Einhergehend mit dieser Entwicklung fällt die Breite bei Kernmateriedichte auf ein Fünftel ihres Vakuumwertes ab. Die $\pi\pi$ -Wechselwirkung, die über die Wardidentität direkt an die Propagatoren von Pion und σ -Meson gekoppelt ist, zeigt mit zunehmender Dichte eine Ansammlung von Stärke in der Nähe der Zwei-Pion-Schwelle, aufgrund dieser Modifikationen. Diese Stärke könnte möglicherweise die Erklärung für experimentelle Signale bei der Untersuchung der $\pi\pi$ -Wechselwirkung in der Nähe der Zwei-Pion-Schwelle liefern.

Ein wichtiger Punkt ist jedoch noch zu beachten. Bei endlicher Dichte gibt es ein ausgezeichnetes Bezugssystem und der endliche Impuls des Pionenpaares - und damit des σ -Mesons - ist bei der Untersuchung der Stärke der $\pi\pi$ -Wechselwirkung zu berücksichtigen. In der Tat zeigt sich, daß durch Berücksichtigung des endlichen Impulses ein Teil der gemachten Beobachtungen wieder relativiert wird. Bei einem Impuls von 200 MeV, der typisch für die im Experiment gemessenen Pionenpaare ist, sieht man ein Ansteigen der Masse und Breite des σ -Mesons und einen Abfall der $\pi\pi$ -Wechselwirkung um einen Faktor 3.

Im daran anschließenden Kapitel 6 haben wir die gemachten Erkenntnisse auf zwei Experimente angewandt, in welchen die $\pi\pi$ -Wechselwirkung gemessen wurde. Bevor wir jedoch die in den vorangehenden Kapiteln gewonnenen Erkenntnisse über die $\pi\pi$ -Wechselwirkung auf die Experimente übertragen konnten, müsste zunächst eine Reaktionstheorie für beide Experimente ermittelt werden, die den zugrundeliegenden Pionproduktionsprozeß, Absorption der ein- und auslaufenden Teilchen, die Geometrie des Detektors und die Kinematik der Reaktion gut beschreiben kann. Betrachtet man die sich ergebenden differentiellen Wirkungsquerschnitte, sieht man im Fall des einlaufenden Photons eine sehr gute Übereinstimmung der experimentellen und theoretischen Kurven am Wasserstoff. Im Fall des einlaufenden Pions hingegen sieht man deutliche Abweichungen im Energiebereich um die Zwei-Pion-Schwelle. Mit zunehmender Dichte des Targets sieht man im skalaren, isoskalaren Kanal in diesem Energiebereich einen deutlichen Zuwachs an Stärke im Experiment, der von unserer Rechnung allerdings nur teilweise erklärt werden kann. Zwar haben wir in Kapitel 5 ebenfalls einen starken Zuwachs an Stärke in der $\pi\pi$ -Wechselwirkung mit steigender Dichte erkennen können, dieser wird jedoch aufgrund des endlichen Dreierimpulses des auslaufenden Pionenpaares wieder relativiert. Im Experiment beobachtet man einen Anstieg der Stärke um den Faktor 6-7, welcher sich im Rahmen unseres Modells nur mit Pionpaaren erzielen läßt, die sich bei endlicher Dichte in Ruhe befinden, also bei verschwindendem Schwerpunktsimpuls des Paares. Dieses Szenario ist für die untersuchten Experimente jedoch eher die Ausnahme und kann nicht die Erklärung für die auftretende Diskrepanz zwischen Experiment und unserer theoretischen Beschreibung liefern.

Andere Erklärungsansätze, die den beobachteten massiven Zuwachs an Stärke im skalaren, isoskalaren Kanal erklären können, versagen bei der gleichzeitigen Beschreibung der anderen Kanäle. Dies war gerade eine Stärke unseres Ansatzes, daß aufgrund der chiralen Symmetrie nur der Kanal mit den Quantenzahlen des σ -Mesons modifiziert wurde und die anderen Kanäle, wie im Experiment, keinen Änderungen unterliegen.

Um zu einer verbesserten theoretische Beschreibung zu gelangen, sind mehrere Ansätze denkbar. Zum einen könnte die Beschreibung der Absorption im Medium für das ausgehende Pionenpaar näher untersucht werden. Die Absorption ist abhängig von der Energie des Pionenpaares und der Dichte, in der dieses erzeugt wird, so daß kleine Änderungen bereits einen sichtbaren Effekt erzielen könnten. Ein weiterer Ansatz besteht darin, die Eikonal-Näherung aufzugeben und damit dem Potential, in dem sich die Pionen bewegen, einen Realteil zu geben. In einer Rechnung konnte dies bereits benutzt werden, um eine gute Beschreibung der experimentellen Daten zu erzielen [88].

Ein dritter Ansatz schließlich liegt in einer genaueren Untersuchung der $\pi\pi$ -Wechselwirkung jenseits der Zwei-Pion-Schwelle und deren Einfluß auf die theoretischen Rechnungen. Bei endlicher Dichte sieht man in unseren Rechnungen, daß ein Teil der Stärke der $\pi\pi$ -Wechselwirkung unterhalb der Zwei-Pion-Schwelle liegt. Dieser Bereich könnte in dichter Materie aufgrund einer modifizierten Energie-Impuls Beziehung eine wichtige Rolle spielen und damit den Wirkungsquerschnitt in der Nähe der Schwelle beeinflussen, also genau in dem Bereich, in dem unsere Rechnung die experimentellen Daten unterschätzt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, daß wir im Rahmen dieser Arbeit keine endgültige Antwort auf den Ursprung des im Experiment beobachteten Anstieges der $\pi\pi$ -Wechselwirkung in dichter Materie liefern konnten. Die von uns als Erklärung vorgeschlagene teilweise Wiederherstellung der chiralen Symmetrie zeigt in die richtige Richtung, bleibt aber quantitativ deutlich hinter dem Experiment zurück und kann als alleinige Erklärung nicht ausreichen. Weitere Untersuchungen sind daher vonnöten, um diese Frage abschließend beantworten zu können.

Daneben haben wir jedoch eine umfassende Beschreibung des σ -Mesons und der $\pi\pi$ -Wechselwirkung in dichter und heißer Materie liefern können, die die chirale Symmetrie erhält und darüber hinaus Aussagen auch in der Nähe des chiralen Phasenübergangs liefern kann. In einem nächsten Schritt wäre es möglich, nicht nur den Bereich endlicher Temperatur oder endlicher Dichte zu untersuchen, sondern Kombinationen von Temperatur und Dichte näher zu betrachten und den Verlauf des Phasenübergangs in einem ρ -T Diagramm darzustellen. Dabei wäre es interessant zu sehen, inwieweit ein einfaches Modell aus Pion, σ -Meson und einigen nukleonischen Resonanzen ausreicht, das Phasendiagramm zu beschreiben. Ebenso wären Anwendungen im Rahmen von Schwerionenenexperimenten denkbar, um etwa Auswirkungen einer geänderten $\pi\pi$ -Wechselwirkung auf differentielle Wirkungsquerschnitte zu untersuchen.

Anhang A

Hartree-Bogoliubov-Formalismus

Zur Berechnung der Bogoliubov-Faktoren hatten wir in Abschnitt 2.2 die Bedingung gegeben, daß die Koeffizienten c_π und c_σ verschwinden. Daraus folgen als Gleichungen für die Bogoliubov-Koeffizienten:

$$-2U_q V_q e_\Phi(q) = (U_q^2 + V_q^2) \Delta_\Phi(q) \quad (\text{A.1})$$

Hierbei haben wir ein generisches Feld Φ eingeführt, das entweder das σ oder das π kennzeichnet. Zusätzlich wurden zur Vereinfachung noch folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\Delta_\pi(q) = \frac{\lambda_0^2}{2\omega_q} \left[\frac{N+2}{N} I_\pi + \frac{1}{N} I_\sigma + \frac{1}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right], \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta_\sigma(q) = \frac{\lambda_0^2}{2\omega_q} \left[I_\pi + \frac{3}{N} I_\sigma + \frac{3}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right], \quad (\text{A.3})$$

$$e_\Phi(q) = \omega_q + \Delta_\Phi(q). \quad (\text{A.4})$$

Aus Gleichung (A.1) lassen sich nach Quadratischer Ergänzung folgende Identitäten herleiten:

$$\frac{U_q^2 + V_q^2}{e_\Phi(q)} = \frac{-2U_q V_q}{\Delta_\Phi(q)} = \frac{(U_q - V_q)^2}{e_\Phi(q) + \Delta_\Phi(q)} = \frac{(U_q + V_q)^2}{e_\Phi(q) - \Delta_\Phi(q)} \quad (\text{A.5})$$

Daraus erhält man:

$$\frac{e_\Phi(q) - \Delta_\Phi(q)}{e_\Phi(q) + \Delta_\Phi(q)} = \frac{(U_q + V_q)^2}{(U_q - V_q)^2}. \quad (\text{A.6})$$

Unter Ausnutzung von Gl.(2.16) ergibt sich folgende Identität:

$$(U_q - V_q)^2 * (U_q + V_q)^2 = 1 \Leftrightarrow (U_q - V_q)^2 = \frac{1}{(U_q + V_q)^2} \quad (\text{A.7})$$

Kombiniert man diese mit Gl.(A.5) folgt

$$(U_q + V_q)^2 = \frac{e_\Phi(q) - \Delta_\Phi(q)}{\sqrt{e_\Phi(q)^2 - \Delta_\Phi(q)^2}}. \quad (\text{A.8})$$

Zusammen mit Gl.(2.16) erhält man damit als Lösung für die Bogoliubovfaktoren:

$$\begin{aligned} u_q^2 &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{e_\pi}{\sqrt{e_\pi^2 - \Delta_\pi^2}} \right), & v_q^2 &= \frac{1}{2} \left(-1 \pm \frac{e_\pi}{\sqrt{e_\pi^2 - \Delta_\pi^2}} \right), \\ x_q^2 &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{e_\sigma}{\sqrt{e_\sigma^2 - \Delta_\sigma^2}} \right), & y_q^2 &= \frac{1}{2} \left(-1 \pm \frac{e_\sigma}{\sqrt{e_\sigma^2 - \Delta_\sigma^2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Nun können wir dieses Ergebnis benutzen, um die Massen der Quasiteilchen zu bestimmen. Man kombiniert Gl.(2.23) mit Gl.(A.9) und erhält:

$$\varepsilon_\Phi^2(q) = \left[(U_q^2 + V_q^2) e_\Phi(q) + 2U_q V_q \Delta_\Phi(q) \right] w_q (U_q - V_q)^2. \quad (\text{A.10})$$

Nun kann man noch ausnutzen, daß $e_\Phi(q) = w_q + \Delta_\Phi(q)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Phi^2(q) &= [w_q(U_q^2 + V_q^2) + (U_q + V_q)^2 \Delta_\Phi(q)] w_q (U_q - V_q)^2 \\ &= w_q^2 (U_q - V_q)^2 (U_q^2 + V_q^2) + w_q \Delta_\Phi(q) \\ &= w_q^2 (U_q - V_q)^2 [(U_q + V_q)^2 - 2U_q V_q] + w_q \Delta_\Phi(q) \\ &= w_q^2 - 2w_q^2 (U_q - V_q)^2 U_q V_q + w_q \Delta_\Phi(q). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Aus der Bedingung, daß $c_\Phi(q)$ verschwindet, folgt:

$$\Delta_\Phi(q) (U_q + V_q)^2 = -2U_q V_q w_q. \quad (\text{A.12})$$

Dies eingesetzt in Gl.(A.11) liefert folgende einfache Form für die Quasiteilchenenergien:

$$\varepsilon_\Phi^2(q) = w_q^2 + 2w_q \Delta_\Phi(q). \quad (\text{A.13})$$

Damit folgt das in Gl.(2.25) angegebene Ergebnis für die Quasiteilchenmassen

$$\varepsilon_\pi^2(0) = \varepsilon_\pi^2(q) - q^2 = w_q^2 + 2w_q \Delta_\pi(q) - q^2 \quad (\text{A.14})$$

$$= \mu_0^2 + 2w_q \Delta_\pi(q) \quad (\text{A.15})$$

$$= \mu_0^2 + \lambda_0^2 \left(\frac{N+2}{N} I_\pi + \frac{1}{N} I_\sigma + \frac{1}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\varepsilon_\sigma^2(0) = \mu_0^2 + \lambda_0^2 \left(I_\pi + \frac{3}{N} I_\sigma + \frac{1}{N} \langle \sigma \rangle^2 \right). \quad (\text{A.17})$$

Anhang B

Regularisierung der Tadpolediagramme

Die auftretenden Tadpoleintegrale sind quadratisch divergent. Um diese Integrale zu regularisieren, wählen wir die Methode von Pauli-Villars. Die zu regularisierenden Integrale sind von folgender Form:

$$I_\pi = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m_\pi^2}. \quad (\text{B.1})$$

Bei der Pauli-Villars-Regularisierung führt man dann „schwere“ Regulatormassen Λ_i ein und ersetzt den Integranden mit Hilfe dieser Regulatormassen in folgender Weise:

$$I_\pi = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m_\pi^2} \rightarrow I_\pi = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m_\pi^2} + i \sum_{i=1}^n C_i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \Lambda_i^2}. \quad (\text{B.2})$$

Zusätzlich fordert man, daß die eingeführten Massen Λ_i und die Vorfaktoren C_i folgenden Bedingungen genügen:

$$(1) \sum_{i=0}^n C_i = 0 \quad (2) \sum_{i=0}^n C_i \Lambda_i^2 = 0 \quad (\text{B.3})$$

Man wählt $C_0 = 1$ und $\Lambda_0 = m_\pi$. Durch die Wahl von $C_1 = 1$, $C_2 = -2$ und $\Lambda_1^2 = m_\pi^2 + 2\Lambda^2$, $\Lambda_2^2 = m_\pi^2 + \Lambda^2$ lassen sich diese Bedingungen erfüllen. Nach Einsetzen in das Tadpoleintegral ergibt sich

$$I_\pi = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{p^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{p^2 - \Lambda_1^2 + i\varepsilon} - \frac{2}{p^2 - \Lambda_2^2 + i\varepsilon} \right] \quad (\text{B.4})$$

Dieses Integral ist nun nicht mehr divergent. Zuerst erhält man nach der p_0 -Integration unter Verwendung des Residuensatzes:

$$I_\pi = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2\omega_{p,m}} + \frac{1}{2\omega_{p,\Lambda_1}} - \frac{2}{2\omega_{p,\Lambda_2}} \right]. \quad (\text{B.5})$$

Dieses Integral lässt sich ebenfalls berechnen und es ergibt sich:

$$I_\pi = \frac{1}{8\pi^2} \lim_{u \rightarrow \infty} \left[u^2 - m_\pi^2 \ln 2u + m_\pi^2 \ln m_\pi + u^2 - \Lambda_1^2 \ln 2u + \Lambda_1^2 \ln \Lambda_1 - 2u^2 + 2\Lambda_2^2 \ln 2u - 2\Lambda_2^2 \ln \Lambda_2 \right]. \quad (\text{B.6})$$

Setzt man nun die Definition der Λ_i ein, so sieht man, daß die u -abhängigen Terme verschwinden und man erhält:

$$\begin{aligned} I_\pi &= \frac{1}{8\pi^2} \left[m_\pi^2 \ln m_\pi + \Lambda_1^2 \ln \Lambda_1 - 2\Lambda_2^2 \ln \Lambda_2 \right] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[m_\pi^2 \ln m_\pi^2 + \Lambda_1^2 \ln \Lambda_1^2 - 2\Lambda_2^2 \ln \Lambda_2^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Unter Ausnutzung der zweiten Bedingung in Gl.(B.3) kann man dies schliesslich in folgende einfache Form überführen:

$$\begin{aligned} I_\pi &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda_1^2 \ln \frac{\Lambda_1^2}{m_\pi^2} - 2\Lambda_2^2 \ln \frac{\Lambda_2^2}{m_\pi^2} \right] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[(m_\pi^2 + 2\Lambda^2) \ln \frac{m_\pi^2 + 2\Lambda^2}{m_\pi^2} - 2(m_\pi^2 + \Lambda^2) \ln \frac{m_\pi^2 + \Lambda^2}{m_\pi^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Für die Regulatormasse haben wir $\Lambda = 1.2 \text{ GeV}$ gewählt.

Anhang C

Die Streumatrix $T_{\pi\pi}$

Wir hatten für die Streumatrix zwei Beschreibungen verwendet. Zum einen eine Beziehung zwischen der Streumatrix und den Propagatoren resultierend aus den chiralen Ward Identitäten (siehe Gl.(2.41)). Alternativ dazu ließ sich die Streumatrix als Lösung einer Lippmann-Schwinger Gleichung schreiben wie in Gl.(3.6). Im Folgenden wollen wir nun zeigen, daß beide Gleichungen äquivalent zueinander sind.

Wir starten von der Streumatrix, die man mittels der Propagatoren und dem Kondensat $\langle\sigma\rangle$ schreiben konnte als

$$T_{\pi\pi}(E, \vec{p}) = \frac{D_{\pi}^{-1}(E, \vec{p}) - D_{\sigma}^{-1}(E, \vec{p})}{\langle\sigma\rangle^2} \frac{D_{\sigma}(E, \vec{p})}{D_{\pi}(E, \vec{p})}. \quad (\text{C.1})$$

Einsetzen der Propagatoren aus Gl.(3.7) ergibt:

$$T_{\pi\pi} = \frac{\varepsilon_{\sigma}^2 - \varepsilon_{\pi}^2 + \frac{2\lambda_0^4 \langle\sigma\rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}}}{\langle\sigma\rangle^2} \frac{s - \varepsilon_{\pi}^2}{s - \varepsilon_{\sigma}^2 - \frac{2\lambda_0^4 \langle\sigma\rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}}}, \quad (\text{C.2})$$

wobei aus Gründen der Übersicht die Abhängigkeit von Energie und Impuls weggelassen wurde. Dies kann man mittels algebraischer Umformungen umschreiben als

$$T_{\pi\pi} = \frac{(\varepsilon_{\sigma}^2 - \varepsilon_{\pi}^2)(1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}) + 2\lambda_0^4 \langle\sigma\rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}}{\langle\sigma\rangle^2 (1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi})} \frac{s - \varepsilon_{\pi}^2}{s - \varepsilon_{\sigma}^2 - \frac{2\lambda_0^4 \langle\sigma\rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}}{1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi}}}. \quad (\text{C.3})$$

Durch Einsetzen der Identität in Gl.(3.2) lässt sich dies vereinfachen zu

$$T_{\pi\pi} = \frac{2\lambda_0^2 (s - \varepsilon_{\pi}^2)}{(1 - \lambda_0^2 \Sigma_{\pi\pi})(s - \varepsilon_{\sigma}^2) - 2\lambda_0^4 \langle\sigma\rangle^2 \Sigma_{\pi\pi}}. \quad (\text{C.4})$$

Mit der Definition des Potentials in Gl.(3.5) und Gl.(3.2) ergibt sich

$$T_{\pi\pi} = V_{\pi\pi} \frac{1}{1 - \Sigma_{\pi\pi}(\lambda_0^2 + \lambda_0^2 \frac{\varepsilon_{\sigma}^2 - \varepsilon_{\pi}^2}{s - \varepsilon_{\sigma}^2})}. \quad (\text{C.5})$$

Unter Benutzung der Definition des Potentials findet man dann

$$T_{\pi\pi} = \frac{V_{\pi\pi}}{1 - \frac{1}{2}\Sigma_{\pi\pi}V_{\pi\pi}} . \quad (\text{C.6})$$

Dies ist genau die in Gl.(3.6) angegebene Lösung der Lippmann-Schwinger Gleichung für die Streumatrix.

Anhang D

Pion-Selbstenergie in dichter Materie

Die Pion-Selbstenergie in dichter Materie ist gegeben als Funktion der Suszeptibilitäten (Gl.(5.9)), wobei diese folgende Form haben :

$$\tilde{\chi}_{NN^{-1}}(E, \vec{p}) = -4 \frac{f_\pi^2 \Gamma_\pi^2(\vec{p})}{m_\pi^2} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} G_{N^{-1}}(q) (G_N(q+p) + G_N(q-p)) \quad (\text{D.1})$$

$$\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(E, \vec{p}) = -\frac{16}{9} \frac{f_{\pi\Delta N}^2 \Gamma_\pi^2(\vec{p})}{m_\pi^2} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} G_{N^{-1}}(q) (G_\Delta(q+p) + G_\Delta(q-p)) . \quad (\text{D.2})$$

$\Gamma_\pi(\vec{p})$ ist hierbei der übliche Monopolformfaktor des πNN^{-1} - bzw. $\pi\Delta N^{-1}$ -Vertex aus Gl.(5.7) Der Nukleon- bzw. Deltapropagator in einem freien Fermigas und nicht-relativistischer Energiebeziehung ist definiert als:

$$G_N(q_0, \vec{q}) = \frac{1 - n(\vec{q})}{q_0 - \frac{\vec{q}^2}{2m_N} + i\eta} , \quad (\text{D.3})$$

$$G_{N^{-1}}(q_0, \vec{q}) = \frac{n(\vec{q})}{q_0 - \frac{\vec{q}^2}{2m_N} - i\eta} , \quad (\text{D.4})$$

$$G_\Delta(q_0, \vec{q}) = \frac{1}{q_0 - \frac{\vec{q}^2}{2m_\Delta} - (m_\Delta - m_N) - \frac{i}{2}\Gamma_\Delta(E, \vec{p}) + i\eta} . \quad (\text{D.5})$$

Damit lässt sich die Suszeptibilität $\tilde{\chi}_{NN^{-1}}(E, \vec{p})$ durch die Lindhardfunktion $\Phi(E, \vec{p})$ ausdrücken:

$$\tilde{\chi}_{NN^{-1}}(E, \vec{p}) = -4 \frac{f_\pi^2 \Gamma_\pi^2(\vec{p})}{m_\pi^2} \Phi_{NN^{-1}}(E, \vec{p}) , \quad (\text{D.6})$$

wobei die Lindhardfunktion gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{Re}\Phi_{NN^{-1}}(E, \vec{p}) &= \frac{M_N p_F}{4\pi^2} \left[1 - \frac{p_F}{2p} (1 - z_-^2) \ln \left(\left| \frac{z_- + 1}{z_- - 1} \right| \right) + \frac{p_F}{2p} (1 - z_+^2) \ln \left(\left| \frac{z_+ + 1}{z_+ - 1} \right| \right) \right] \\ \text{Im}\Phi_{NN^{-1}}(E, \vec{p}) &= \begin{cases} \frac{M_N p_F^2}{8\pi p} (1 - z_-^2), & \text{falls } p|p_F - \frac{p}{2}| \leq EM_N \leq p(p_F + \frac{p}{2}), \\ \frac{M_N^2 E}{4\pi p}, & \text{falls } p < 2p_F \text{ und } 0 \leq EM_N \leq p(p_F - \frac{p}{2}), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

mit

$$z_{\pm} = \frac{EM_N}{pp_F} \pm \frac{p}{2p_F}. \quad (\text{D.8})$$

Für den Δ -Loch Prozess erhält man nach der q_0 -Integration

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(E, \vec{p}) &= -\frac{16}{9} \frac{f_{\pi\Delta N}^2 \Gamma_{\pi}^2(\vec{p})}{m_{\pi}^2} i \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(\frac{n(\vec{q})}{E - M_{\Delta} - \frac{(\vec{p}+\vec{q})^2}{2M_{\Delta}} + M_N + \frac{\vec{q}^2}{2M_N} + \frac{i}{2}\Gamma_{\Delta}} \right) \\ &\quad - \frac{n(\vec{q})}{E + M_{\Delta} + \frac{(\vec{p}+\vec{q})^2}{2M_{\Delta}} - M_N - \frac{\vec{q}^2}{2M_N} - \frac{i}{2}\Gamma_{\Delta}}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Die Besetzungszahlfunktion $n(\vec{q})$ beschränkt die Integration über \vec{q} bis zum Fermiimpuls. Dieser liegt allerdings für die von uns betrachteten Dichten deutlich unter der Masse der Deltaresonanz. Man kann daher die Terme proportional zu \vec{q}^2 vernachlässigen [13] und erhält schließlich

$$\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(E, \vec{p}) = -\frac{4}{9} \frac{f_{\pi\Delta N}^2 \Gamma_{\pi}^2(\vec{p})}{m_{\pi}^2} \rho \left\{ \frac{1}{E - \epsilon_{\Delta N^{-1}} + \frac{1}{2}\Gamma_{\Delta}} - \frac{1}{E + \epsilon_{\Delta N^{-1}}} \right\}, \quad (\text{D.10})$$

mit

$$\epsilon_{\Delta N^{-1}} = M_{\Delta} - M_N + \frac{\vec{p}^2}{2M_{\Delta}}. \quad (\text{D.11})$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß die Dichte ρ gegeben ist durch

$$\rho = 4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} n(\vec{q}). \quad (\text{D.12})$$

Der Term Γ_{Δ} wurde eingeführt, da das Delta eine kurzlebige Nukleonresonanz ist, die sich über Abstrahlung eines Pions in ein Nukleon umwandelt. Die Breite soll zum einen Pauli-Blocking und relativistische Korrekturen beinhalten, zum anderen aber auch Korrekturen höherer Ordnung berücksichtigen, so daß

$$\Gamma_{\Delta} = \Gamma_{\Delta}^{(1)} + \Gamma_{\Delta}^{(2)}. \quad (\text{D.13})$$

Den ersten Term entnehmen wir von Oset und Salcedo [84]:

$$\Gamma_{\Delta}^{(1)}(E, \vec{p}) = \frac{2}{3} \frac{f_{\pi\Delta N}^2 q_{cm}^2}{4\pi m_{\pi}^2} \frac{(W + M_N)^2 - m_{\pi}^2}{4W^2} \frac{1}{2} (1 + \bar{\mu}) \Gamma_{\pi}^2(k) \quad (\text{D.14})$$

mit

$$\bar{\mu} = \begin{cases} -1, & \text{falls } \bar{\mu}^0 \leq -1, \\ \bar{\mu}^0, & \text{falls } -1 \leq \bar{\mu}^0 \leq +1, \\ +1, & \text{falls } \bar{\mu}^0 \geq +1, \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

$$\bar{\mu}^0 = \frac{E_N^{cm}(M_N + E) - E_F W}{pq_{cm}}.$$

Die invariante Δ -Masse und die Fermienergie des Nukleons lauten

$$W^2 = (M_N + E)^2 - p^2, \quad (\text{D.16})$$

$$E_F = \sqrt{M_N^2 + p_F^2},$$

und Impuls und Energie des Nukleons im Δ -Ruhesystem sind gegeben durch:

$$E_N^{cm} = \sqrt{M_N^2 + q_{cm}^2}, \quad (\text{D.17})$$

$$q_{cm}^2 = \frac{(W^2 - M_N^2 - m_{\pi}^2)^2 - 4M_N^2 m_{\pi}^2}{4W^2}.$$

Für $\Gamma_{\Delta}^{(2)}$ wählen wir einen phänomenologischen Ansatz, um das wohlbekannte ρ^2 -Verhalten im inelastischen Teil des πN Potentials zu erhalten [85]:

$$\Gamma_{\Delta}^{(2)}(E) = 48 \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 + \frac{E - m_{\pi}}{C_1 - m_{\pi}} \right) \Lambda(E), \quad (\text{D.18})$$

wobei $C_1 = 380$ MeV ist. Der Formfaktor

$$\Lambda(E) = \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{E - C_2}{10}}} \right) \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{E - C_3}{15}}} \right) \quad (\text{D.19})$$

unterdrückt Beiträge von Energien $E \leq C_2 = 110$ MeV und $E \geq C_3 = 400$ MeV. Dieser Beitrag alleine reicht allerdings nicht aus, um die Absorption im optischen Potential vollständig zu reproduzieren. Deswegen berücksichtigen wir auch Zwei-Teilchen-Zwei-Loch-Anregungen, die durch das Pion angeregt werden können. Dabei folgen wir dem von der Lyoner Gruppe [86] benutzten Ansatz und setzen für den Imaginärteil

$$\text{Im} \chi_{2p2h}(E, \vec{p}) = -0.3 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \Lambda(E) \Gamma_{\pi}^2(\vec{p}). \quad (\text{D.20})$$

Der zugehörige Realteil spielt nur eine untergeordnete Rolle, wir werden ihn daher vernachlässigen. Zur Vereinfachung fassen wir χ_{2p2h} mit der ΔN^{-1} Suszeptibilität zusammen

$$\tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(E, \vec{p}) \rightarrow \tilde{\chi}_{\Delta N^{-1}}(E, \vec{p}) + \chi_{2p2h}(E, \vec{p}). \quad (\text{D.21})$$

Anhang E

Die Reaktion $\gamma N \rightarrow \pi\pi N$

Zur Berechnung der in Abb.(6.11) dargestellten Feynman Diagramme und Ableitung der zugehörigen Feynman Regeln wurden die folgenden Wechselwirkungsbeiträge zur Lagrangendichte verwendet [81]:

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = -\frac{f}{m_\pi} \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \vec{\phi} \vec{\tau} \Psi , \quad (\text{E.1})$$

$$\mathcal{L}_{\pi\Delta N} = -\frac{f^*}{m_\pi} \Psi_\Delta^\dagger S_i^\dagger (\partial_i \phi^\lambda) T^{\lambda\dagger} \Psi_N + h.c. , \quad (\text{E.2})$$

$$\mathcal{L}_{\pi\Delta\Delta} = -\frac{f_\Delta}{m_\pi} \Psi_\Delta^\dagger S_{\Delta i} (\partial_i \phi^\lambda) T_\dagger^\lambda \Psi_\Delta + h.c. , \quad (\text{E.3})$$

$$\mathcal{L}_{\pi\Delta N^*} = -\frac{g_{\pi\Delta N^*}}{m_\pi} \Psi_\Delta^\dagger S_i^\dagger (\partial_i \phi^\lambda) T^{\lambda\dagger} \Psi_{N^*} + h.c. , \quad (\text{E.4})$$

$$\mathcal{L}_{\pi\Delta N^{*'}} = i\bar{\Psi}_{N^{*'}} (\tilde{f}_{\pi\Delta N^{*'}} - \frac{\tilde{g}_{\pi\Delta N^{*'}}}{m_\pi^2} S_i^\dagger \partial_i S_j \partial_j) \phi^\lambda T^{\lambda\dagger} \Psi_\Delta + h.c. , \quad (\text{E.5})$$

$$\mathcal{L}_{\gamma\pi\pi} = ie(\phi_+ \partial^\mu \phi_- - \phi_- \partial^\mu \phi_+) A_\mu , \quad (\text{E.6})$$

$$\mathcal{L}_{\pi NN^*} = -\frac{\tilde{f}}{m_\pi} \Psi_{N^*}^\dagger \sigma_i (\partial_i \vec{\phi}) \vec{\tau} \Psi_N + h.c. , \quad (\text{E.7})$$

$$\mathcal{L}_{\pi\pi NN^*} = -\tilde{C} \bar{P} s i_{N^*} \vec{\phi} \vec{\phi} \Psi_N + h.c. , \quad (\text{E.8})$$

$$\mathcal{L}_{\gamma NN} = -e \bar{\Psi}_N (\gamma^\mu A_\mu - \frac{\chi_N}{2m} \sigma^{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu) \Psi_N , \quad (\text{E.9})$$

$$\mathcal{L}_{\gamma\pi NN} = -iq_\pi \frac{f}{m_\pi} \bar{P} s i \gamma^\mu \gamma_5 A_\mu \vec{\phi} \vec{\tau} \Psi , \quad (\text{E.10})$$

$$\mathcal{L}_{\gamma\Delta N} = -\frac{f_{\gamma\Delta N}}{m_\pi} \Psi_\Delta^\dagger \epsilon_{ijk} S_i^\dagger (\partial_j A_k) T_3 \Psi_N + h.c. , \quad (\text{E.11})$$

$$\mathcal{L}_{\gamma NN^*} = \frac{\tilde{f}_\gamma^N}{m_\pi} \bar{P} s i_N \sigma^{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu \Psi_{N^*} + h.c. , \quad (\text{E.12})$$

$$\mathcal{L}_{\gamma\pi\Delta N} = -iq \frac{f^*}{m_\pi} \Psi_\Delta^\dagger S_i^\dagger A_i \phi^\lambda T^\lambda \Psi_N + h.c. , \quad (E.13)$$

$$\mathcal{L}_{\gamma\pi NN^*} = -iq \frac{\tilde{f}}{m_\pi} \Psi_{N^*}^\dagger \sigma_i A_i \vec{\phi} \vec{\tau} \Psi_N + h.c. , \quad (E.14)$$

$$\mathcal{L}_{\gamma NN^{*'}} = \bar{\Psi}_N \tilde{g}_\gamma \vec{S} A - i \tilde{g}_\sigma (\vec{\sigma} \times \vec{S}) A \Psi_{N^{*'}} + h.c. . \quad (E.15)$$

Die auftretenden Kopplungskonstanten haben dabei folgende Werte:

$f = 1.$ $f_\Delta = 0.802$ $\tilde{f} = 0.477$ $g_{\pi\Delta N^*} = 2.07$ $f_{\pi\Delta N^{*'}} = 0.911$ $\chi_N = \begin{cases} 1.79 & \text{Proton} \\ -1.91 & \text{Neutron} \end{cases}$ $\tilde{g}_\gamma^N = \begin{cases} 0.108 & \text{Proton} \\ -0.129 & \text{Neutron} \end{cases}$ $\mu_\Delta = \frac{e_\Delta}{e} \mu_p$	$f^* = 2.13$ $f_{\gamma\Delta N} = 0.116$ $C = -2.29 m_\pi^{-1}$ $e = 0.3027$ $g_{\pi\Delta N^{*'}} = -0.552$ $\tilde{f}_\gamma^N = \begin{cases} 0.0173 & \text{Proton} \\ -0.0112 & \text{Neutron} \end{cases}$ $\tilde{g}_\sigma^N = \begin{cases} -0.049 & \text{Proton} \\ 0.0073 & \text{Neutron} \end{cases}$ $\mu_{\Delta^{++}} = 1.62 \mu_p .$
--	--

Literaturverzeichnis

- [1] J. Gasser, H. Leutwyler, Ann. Phys. 158 (1984) 142.
- [2] Z. Fodor, Nucl. Phys. A 715 (2003) 319.
- [3] K. Rajagopal, Comments Nucl.Part.Phys. A2 (2002) 120.
- [4] M. Urban, M. Buballa, R. Rapp, J. Wambach, Nucl. Phys. A 673 (2000) 357.
- [5] R. Rapp, J. Wambach, Adv. Nucl. Phys. 25 (2000) 1.
- [6] H.-C. Jean, J. Piekarewicz, A. G. Williams, Phys. Rev. C49 (1994) 1981.
- [7] C.M. Ko, P. Levai, X.J. Qiu, C.T. Li, Phys. Rev. C, Nucl Phys. 45(1992) 1400.
- [8] M. Lutz, A. Steiner, W. Weise, Nucl. Phys. A 574 (1994) 755.
- [9] F. Bonutti et al., Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 603.
- [10] J. G. Messchendorp et al., Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 222 0
- [11] A. Starostin et al., Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 5539.
- [12] M. Gell-Mann, M. Levy, Nuovo Cimento 16 (1960) 705.
- [13] Z. Aouissat, G. Chanfray, P. Schuck und J. Wambach, Nucl. Phys. A 603 (1997) 458.
- [14] J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg, Phys. Rev. 127 (1962) 965.
- [15] S. Eidelman et al., Phys. Lett. B592 (2004) 1.
- [16] C. Bloch und A. Messiah, Nucl. Phys. 39 (1962) 95.
- [17] M. E. Peskin, D. Schröder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1995).
- [18] E. R. Marshalek, Nucl. Phys. A 224 (1974) 221.
- [19] D. J. Rowe, Rev. Mod. Phys. 40 (1968) 153.

- [20] C. Isselhorst, Diplomarbeit *Modifikation des σ -Mesons in dichter Materie*, Darmstadt (2001)
- [21] Z. Aouissat, P. Schuck und J. Wambach, Nucl. Phys. A 618 (1997) 402.
- [22] B. W. Lee, Nucl. Phys. B 9 (1969) 469.
- [23] K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 16 (1970) 48.
- [24] B. W. Lee, Chiral Dynamics, *Documents on Modern Physics*, (Gordan and Breach Science Publishers, New York, 1972)
- [25] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 17 (1966) 616.
- [26] N. Törnqvist, Summary Talk in the Proceedings to „The possible existence of the light σ resonance and its implications to hadron physics“, Kyoto, Japan 11.-14. Juni 2000.
- [27] S. D. Protopopescu et al., Phys. Rev. D 7 (1973) 1279.
- [28] D. Lohse, J. W. Durso, K. Holinde und J. Speth, Phys. Lett. B 234 (1989) 235, Nucl. Phys. A 516 (1990) 513.
- [29] S. Pislak et al., Phys. Rev. D 67 (2003) 072004.
- [30] J. Gasser und H. Leutwyler, Phys. Lett. B 125 (1983) 325.
- [31] J. Bijnens et al., Phys. Lett. B 374 (1996) 210, Nucl. Phys. B 508 (1997) 263; err.ibid. B 517 (1998) 639.
- [32] F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, Nucl. Phys. B 605 (2001) 579.
- [33] Y. Taniguchi und Y. Yoshida, Phys. Rev. D 55 (1997) 2283.
- [34] N. Petropoulos, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys 25 (1997) 2225
- [35] C. Bloch und C. De Dominicis, Nucl. Phys. 7 (1958) 459; 10 (1959) 181,509.
- [36] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. 14 (1955) 351.
- [37] A. L. Fetter und J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particles Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).
- [38] N. Tetradis, Nucl. Phys. A 726 (2003) 93.
- [39] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford University Press, Oxford, 1989).

- [40] L. P. Kadanoff, *Statics, Dynamics, and Renormalization* (World Scientific Publishing, Singapore, 2000)
- [41] O. Bohr , B.-J. Schaefer und J. Wambach, Int. J. Mod. Phys. A16 (2001) 3823.
- [42] K. Kanaya und S. Kaya, Phys. Rev. D 51 (1995) 2404.
- [43] P. Gerber und H. Leutwyler, Nucl. Phys. B 321 (1989) 387.
- [44] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill 1965.
- [45] T. E. O. Ericson und W. Weise, *Pions and Nuclei*, Clarendon, Oxford 1988.
- [46] Z. Aouissat, G. Chanfray, P. Schuck, Mod. Phys. Lett. A 15 (1993) 1379.
- [47] R. Rapp, Doktorarbeit, Berichte des Forschungszentrums Jülich 3195, 1996;
G. Chanfray, R. Rapp und J. Wambach, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 368.
- [48] T. Hatsuda, T. Kunihiro und H. Shimizu, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 2840.
- [49] S. Hirenzaki et al., Phys. Lett. B 378 (1996) 29, Phys. Rev. C 53 (1996) 277.
- [50] K. Rajagopal, F. Wilczek, Nucl. Phys. B 399 (1993) 395.
- [51] T. Hatsuda, T. Kunihiro, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 158.
- [52] M. C. Birse, J. Phys. G. Nucl. Part. Phys. 20 (1994) 1537.
- [53] Z. Aouissat, P. Schuck, J. Wambach, Nucl. Phys. A 690 (2001) 127c.
- [54] M. Gell-Mann, R. Oakes, B. Renner, Phys. Rev. 175 (1968) 2195.
- [55] G. Chanfray, M. Ericsson, Eur. Phys. J. A 18 (2003) 463.
- [56] W. M. Alberico, M. Ericson und A. Molinari, Ann. Phys. 154 (1984) 356.
- [57] R. Machleidt, K. Holinde, Ch. Elster, Phys. Reports 149 (1987) 1.
- [58] A. B. Migdal, E. E. Saperstein, M. A. Troitsky, D. Nd. Voskresensky , Phys. Rep. V192 (1990) 179.
- [59] H. Esbensen, G. F. Bertsch, Ann. of Phys. 157 (1984) 255.
- [60] M. J. Vicente-Vacas, E. Oset, Phys. Rev. C 60 (1999) 064621.
- [61] F. Bonutti et al., Nucl. Phys. A 677 (2000) 213.
- [62] R. M. Rockmore, Phys. Rev. C 27 (1983) 2150.
- [63] E. Oset und M. J. Vicente Vacas, Nucl. Phys. A 454 (1985) 637.

- [64] E. Oset und M. J. Vicente Vacas, Nucl. Phys. A 446 (1985) 584.
- [65] J. Beringer, π N Newsletter 7 (1992) 33.
- [66] V. Bernard, N. Kaiser, U.-G. Meißner, Nucl. Phys. A 619 (1997) 261.
- [67] H. Yamagishi, I. Zahed, Ann. Phys. 247 (1996) 292.
- [68] T. S. Jensen, A. F. Miranda, Phys. Rev. C55 (1997) 1039.
- [69] OMICRON Collaboration, Z. Phys, C 48 (1990) 201, Phys. Lett. B 225 (1989) 198.
- [70] C. W. Bjork et al., Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 62.
- [71] M. E. Sevier et al., Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 2569.
- [72] P. Schuck et al., Proceedings of XXXVI. International Winter Meeting on Nuclear Physics, Ed. I. Iori, Bormio (Italy), January 1998.
- [73] T. Hatsuda, T. Kunihiro, Phys. Lett. B 185 (1987) 304.
- [74] Z. Aouissat, G. Chanfray, P. Schuck, J. Wambach. nucl-th/9908076, v2, August 31, 1999.
- [75] R. Rapp, J.W. Durso, Z. Aouissat, G. Chanfray, O. Krehl, P. Schuck, J. Speth, J. Wambach, Phys. Rev. C 59 (1999) R1237.
- [76] M. J. Vicente-Vacas, E. Oset, Contribution to the International Workshop XXVIII on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, Hirschegg, Austria, Januar 16-22, 2000.
- [77] Z. Aouissat et al., Contribution to the International Workshop on Chiral Fluctuations in Hadronic Matter, IPN Orsay, France, September 26-28, 2001.
- [78] F. Bonutti et al., Phys. Rev. C 60 (1999) 018201.
- [79] L. Roca et al., Phys. Lett. B 541 (2002) 77.
- [80] J. Nacher et al., Nucl. Phys. A 695 (2001) 295.
- [81] J. A. Gomez-Tejedor, E. Oset, Nucl. Phys. A 571 (1994) 667, Nucl. Phys. A 600 (1996) 413.
- [82] A. Braghieri et al., Phys. Lett. B 363 (1995) 46.
- [83] M. Wolf et al., Eur. Phys. J. A 9 (2000) 5.
- [84] E. Oset und L. L. Salcedo, Nucl. Phys. A 468 (1987) 631.

- [85] L. S. Kisslinger, Phys. Rev. 98 (1955) 761.
- [86] G. Chanfray und M. Ericson, Phys. Lett. B 141 (1984) 163.
- [87] J. Nieves, E. Oset und C. Garcia-Recio, Nucl. Phys. A 554 (1993) 554.
- [88] P. Mühlich, L. Alvarez-Ruso, O. Buss, U. Mosel, Phys.Lett. B 595 (2004) 216.

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. J. Wambach für die Anregung zu dieser Arbeit, sein ständiges Interesse und die hilfreichen Gespräche bedanken.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Zoheir Aouissat für die zeitweise Betreuung dieser Arbeit. Er war jederzeit bereit, auftretende Fragen zu beantworten und Probleme zu diskutieren.

Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Braun-Munziger für seine Bereitschaft als Koreferent dieser Arbeit zu fungieren.

Ein ganz besonderer Dank gebührt Dr. M. Buballa, Axel Maas und Dominik Nickel, deren kritische Kommentare und Anregungen beim Korrekturlesen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Dr. Thomas Roth und Matthias Wagner danke ich für ihre Unterstützung in technischen Fragen.

Allen Mitgliedern der NHQ-Gruppe danke ich für ihre Hilfsbereitschaft und die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mich während meines gesamten Studiums unterstützt haben, sowie bei meiner Frau, die mich immer wieder bestärkt und motiviert hat.

TABELLARISCHER LEBENS LAUF

Name: Isselhorst
Vorname: Carsten
Geboren am: 30.07.1975
Geburtsort: Duisburg-Homberg
Familienstand: verheiratet
Adresse: Kattenstr.15
63452 Hanau

Schulbildung

1981-1985 Grundschule Dornheim
1985-1987 Carl-von-Osietzky Schule
Förderstufe Groß-Gerau
1987-1990 Prälat-Diehl-Schule
Gymnasium Groß-Gerau
1990-1994 Ludwig-Georgs-Gymnasium
Altsprachliches Gymnasium Darmstadt
Abitur 1994 Abschluß : Zeugnis der allgemeinen Hochschulreife

Hochschulstudium

1994-1997 Physikstudium an der Technischen Universität Darmstadt
1998-2000 Physikstudium an der Technischen Universität Darmstadt
2000-2001 Diplomarbeit an der Technischen Universität Darmstadt
Januar 2001: Diplomarbeit: Modifikationen des σ -Mesons in dichter Materie
2001-2005: Promotion an der Technischen Universität Darmstadt
2001-03/2005 wissenschaftliche Mitarbeiter an der Technischen Universität Darmstadt
03-05/2005 wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Gesellschaft für Schwerionenforschung

Sonstiges

1997-1998 Allgemeine Wehrpflicht
2000/2001 Selbstständig: Netzwerkadministrator und IT-Berater
2002-2004 Lehrtätigkeit an einer Privatschule (FCS Darmstadt)
2005-2006 Lehrtätigkeit am Herrmann-Staudinger Gymnasium Erlenbach

Eidesstattliche Erklärung:

Hiermit versichere ich, dass ich die Dissertation „ $\pi\pi$ -Korrelationen in heißer und dichter Materie“ selbstständig und nur unter Verwendung der genannten Hilfen und Hilfsmittel verfasst habe.

Carsten Isselhorst